

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS SIMÉTRICOS

ANDRÉS SAMBARINO

RESUMEN. BORRADOR – Marzo 2024. Notas de un curso dado en la Universidad de la República (CMat-IMERL) en el año 2017 y en Sorbonne Université (IMJ-PRG) en los años 2020 y 2021.

ÍNDICE

1. Introducción	1
2. Acción de $\text{isom}_0(X)$, geodésicas y tensor de curvatura	6
3. Un espacio globalmente simétrico asociado a $\text{SL}_d(\mathbb{R})$	13
4. Un espacio simétrico de $\text{SO}_{p,q}$	25
5. El cubrimiento universal de un grupo compacto	32
6. El teorema de descomposición de Cartan	43
7. Planos geodésicos maximales	52
8. Raíces restringidas de un espacio simétrico de tipo no-compacto: contenido geométrico y dinámico	56
9. Diagramas de Dynkin: clasificación de los sistemas de raíces	65
10. Toda álgebra de Lie simple no-compacta admite una involución de Cartan	72
Apéndice A. Algunos conceptos usados	75
Referencias	80

1. INTRODUCCIÓN

Comenzamos con la definición de espacio simétrico. Recordemos que si X es una variedad Riemanniana y p es un punto de X , entonces existe un entorno \mathcal{U} de p tal que todo punto q de \mathcal{U} se une a p por un *único* segmento geodésico enteramente contenido en \mathcal{U} . Esta propiedad permite definir una *simetría central* (local)

$$\mathcal{I}_p : \mathcal{U} \rightarrow X$$

como, si $q = \alpha(t)$ con $\alpha : I \rightarrow X$ geodésica con $\alpha(0) = p$ y $\alpha([0, t]) \subset \mathcal{U}$, entonces

$$\mathcal{I}_p(q) = \alpha(-t).$$

Considerando, de ser necesario, un entorno \mathcal{U} mas pequeño, podemos asegurarnos que \mathcal{I}_p está bien definida.

Definición. Un espacio *localmente simétrico* es una variedad Riemanniana X tal que para todo punto p de X la simetría central \mathcal{I}_p es una isometría local. Decimos que X es *globalmente simétrico* si además \mathcal{I}_p se extiende a una isometría globalmente definida $\mathcal{I}_p : X \rightarrow X$.

El objetivo principal de estas notas es mostrar cómo esta definición, de apariencia inocente, es sumamente restrictiva al punto que

- los espacios globalmente simétricos están totalmente clasificados; es un resultado de E. Cartan en el año 1926-1927,
- los espacios localmente simétricos (completos) *de volumen finito* y rango ≥ 2 también están totalmente clasificados, este hecho es más conocido como el *Teorema de Aritmetividad de Margulis*, demostrado en los años '70.

Nos centramos en la clasificación de Cartan y, siguiendo su estrategia, mostramos la íntima relación entre los espacios globalmente simétricos y las álgebras de Lie semi-simples. Hay varias formas de definir la semi-simplicidad de un álgebra de Lie \mathfrak{g} , la más rápida es: \mathfrak{g} es *semi-simple* si no tiene ideales abelianos. Un grupo de Lie G es *semi-simple* si su álgebra de Lie lo es. Equivalentemente, G es semi-simple si los subgrupos normales abelianos son discretos. Estos grupos deben contrastarse con los grupos *unipotentes*, que tienen un centro (un subgrupo que conmuta con todos), al cocientar por el centro aparece nuevamente un centro, y así sucesivamente.

En estas notas probaremos el siguiente resultado de E. Cartan.

Teorema (Cartan). *Sea X un espacio globalmente simétrico simplemente conexo. Entonces X es isométrico al producto Riemanniano*

$$X_0 \times X_+ \times X_-$$

donde X_0 es un espacio Euclideo, X_+ y X_- son espacios globalmente simétricos ambos con grupo de isometrías semi-simple; X_+ es de curvatura seccional¹ ≤ 0 y X_- compacto y de curvatura seccional ≥ 0 .

Hay varias cosas a resaltar de la anterior descomposición. La primera es que no hay cambios de signo en la curvatura escalar: la curvatura de un espacio globalmente simétrico (simplemente conexo), *indescromponible*², es en todo punto ≥ 0 ó en todo punto ≤ 0 . Esta desigualdad no se puede mejorar, el *rango* de un tal espacio es la dimension maximal de una subvariedad totalmente geodésica plana.

Segundo, cuando no hay factores Euclideos y la curvatura es ≥ 0 , el espacio en cuestión es necesariamente compacto, de ahí surge la distinción entre aquellos espacios *de tipo compacto* y los de *tipo no-compacto* (= sin factores Euclideos y curvatura ≤ 0).

La semi-simplicidad de los grupos de isometrías $\text{isom}(X_+)$ e $\text{isom}(X_-)$ reduce el problema de clasificación de espacios globalmente simétricos a un problema de clasificación de álgebras de Lie semi-simples. Un resultado básico muestra que toda álgebra semi-simple es suma directa de álgebras *simples*, es decir sin ideales; y estas ya habían sido clasificadas por el mismo Cartan en 1914, basándose en ideas de un artículo de Killing a fines de la década 1880, ver Coleman [1].

Finalmente, de la prueba del Teorema de descomposición surge una *dualidad* entre los espacios globalmente simétricos de tipo no-compacto y los de tipo compacto. Esta dualidad puede interpretarse como una generalización de la conocida similitud entre las funciones trigonométricas

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \text{ y } \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

¹La elección de los signos cambiados quedará clara más adelante

²que no se descompone como un producto Riemanniano

que parametrizan las geodésicas de la esfera, con las funciones trigonométricas hiperbólicas

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \text{ y } \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

que parametrizan las geodésicas del espacio hiperbólico (real). Esta dualidad es una fuerte herramienta que nos permitirá demostrar, por ejemplo, el siguiente resultado:

Teorema (Weyl). *Sean X e Y dos espacios globalmente simétricos simplemente conexos de curvatura seccional ≤ 0 . Entonces existe una biyección natural entre los encajes totalmente geodésicos $X \hookrightarrow Y$ y las representaciones $\text{isom}_0(X) \rightarrow \text{isom}_0(Y)$.*

Este resultado permite, via la existencia de representaciones (que se demuestra de manera “puramente algebraica”), reducir varios problemas geométricos de X al caso del espacio simétrico del grupo *especial lineal* de transformaciones lineales de \mathbb{R}^d que preservan volumen $\text{SL}_d(\mathbb{R})$.

Nos concentramos luego en el caso de curvatura seccional ≤ 0 . Una propiedad geométrica que estudiaremos es la siguiente, cercanamente relacionada a la clasificación de estos espacios.

Sea entonces X un espacio globalmente simétrico, sin factores Euclídeos con $K \leq 0$. Las subvariedades conexas, totalmente geodésicas, planas, de X , maximales respecto a la inclusión, son llamadas *planos geodésicos maximales*. Mostraremos que estos planos geodésicos son isometrías globales $\pi : \mathbb{R}^d \rightarrow X$, siendo d el rango de X antes mencionado. Estos planos juegan un papel similar al de las geodésicas en curvatura negativa pinchada.

Entre otras cosas, mostraremos que el grupo de isometrías de X actúa transitivamente en el conjunto de estos planos. Cabe preguntarse entonces por el subgrupo de $\text{isom}_0(X)$ que estabiliza un plano $\pi(\mathbb{R}^d)$ dado. Más precisamente, si f es una isometría de X tal que $f\pi = \pi$, entonces obtenemos (por restricción) una isometría de \mathbb{R}^d , es decir un elemento de $\text{isom}(\mathbb{R}^d) = \text{O}(d) \rtimes \mathbb{R}^d$. La pregunta entonces es:

¿Cual es el subgrupo de $\text{O}(d) \rtimes \mathbb{R}^d$ que se obtiene como restricción de elementos de $\text{isom}_0(X)$ que preservan π ?

Cuando $d = 1$, es decir, cuando la curvatura es < 0 , entonces $\text{O}(1) \rtimes \mathbb{R} = \{\pm 1\} \rtimes \mathbb{R}$ y la pregunta es, si dado un punto, tenemos una isometría global que invierte el sentido de las geodésicas por ese punto, hecho equivalente a ser el espacio globalmente simétrico.

La pregunta es más interesante en rango superior ya que $\text{O}(d)$ se vuelve un grupo mas complicado. Sorprendentemente el grupo en cuestión es de la forma $\{\text{grupo finito}\} \rtimes \mathbb{R}^d$, donde el factor finito $\mathcal{W}(X)$ no depende de π , sino solamente de X . Este grupo es conocido como *el grupo de Weyl* de¹ X y verifica propiedades aritméticas bastante restrictivas, al punto que la figura 1 muestra *todas* las posibilidades para $\mathcal{W}(X)$ cuando X tiene rango 2.

Este grupo codifica también propiedades geométricas de X . Fijamos un punto base $\pi(0)$, por ejemplo, e intentamos responder a la pregunta: *¿dado $v \in \mathbb{R}^d$, existe otro plano geodésico maximal ρ de X por $\pi(0)$ que contenga también a $\pi(v)$?* Recordemos que las subvariedades totalmente geodésicas maximales de \mathbb{R}^d son los subespacios afines, así que le pregunta puede reformularse cómo

¿cuales son los subespacios (por 0) de \mathbb{R}^d que se obtienen como intersección $\pi(\mathbb{R}^d) \cap \rho(\mathbb{R}^d)$, donde ρ es otro plano geodésico maximal de X que contenga a $\pi(0)$?

¹(o usualmente de $\text{isom}_0(X)$)

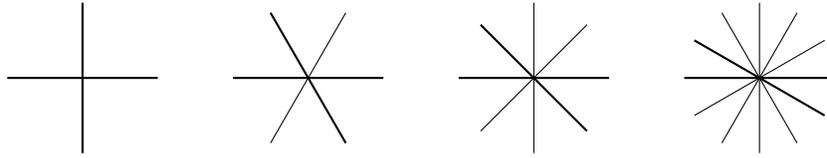


FIGURA 1. Rectas cuyas simetrías axiales generan los grupos de Weyl de rango 2.

{rg2}

Estos subespacios resultarán en una colección finita de hiperplanos de \mathbb{R}^d (y sus intersecciones) y el grupo generado por las simetrías axiales respecto de estos hiperplanos será isomorfo a $\mathcal{W}(X)$, ver devuelta la figura 1. Esto está explicado en la sección 8. En la sección 9 explicamos brevemente la clasificación de los grupos de Weyl.

Comentarios al margen. El objetivo de estas notas es mostrar la relación profunda entre las álgebras de Lie semi-simples (reales) y la geometría de los espacios simétricos. Están orientadas a estudiantes (o no) con un nivel básico de geometría Riemanniana y grupos de Lie. Intentamos minimizar los prerrequisitos técnicos agregando en el apéndice pequeños párrafos con la información “fuera de tema” que necesitamos. Esperamos que estas notas lleven a quien lee a la puerta de entrada a la literatura central del tema, como son por ejemplo los libros de Helgason [4], Humphreys [5] o Knapp [6], de donde hemos sacado prácticamente todo el contenido que aquí se presenta.

Plan de las notas.

En la sección 2 tratamos generalidades que se deducen rápidamente de la definición: completitud, cálculo de geodésicas, cálculo del tensor de curvatura, etc.

En las secciones 3 y 4 estudiamos dos ejemplos de forma detallada, un espacio globalmente simétrico asociado a $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ y otro a $\mathrm{SO}_{p,q}$.

Tratamos luego el caso de grupos compactos (sección 5), éstos pueden verse también como un ejemplo de lo estudiado en la sección 2. El objetivo de esta sección es demostrar un teorema de Weyl que enuncia que si la forma de Killing de un álgebra \mathfrak{g} es definida negativa, entonces todo grupo de álgebra \mathfrak{g} es compacto. Este teorema será la razón por la cual los espacios simétricos de tipo compacto son compactos.

El Teorema de descomposición de Cartan es demostrado en la sección 6. Explicamos aquí la división en tipos, calculamos la curvatura seccional en cada tipo y probamos dicho teorema. Introducimos la dualidad entre espacios globalmente simétricos y terminamos con la prueba del Teorema de Weyl sobre los encajes totalmente geodésicos.

En la sección 7 estudiamos generalidades de los planos totalmente geodésicos maximales, transitividad de $(\mathrm{isom}(X))_{\mathrm{id}}$ en el espacio de planos, etc.

En la sección 8 nos centramos en el tipo no-compacto. Introducimos los sistemas de raíces restringidos, explicamos su contenido geométrico y estudiamos el grupo de Weyl de dicho espacio. Mostramos que este grupo coincide con el grupo de Weyl del sistema de raíces asociado, la prueba de este hecho requiere la dualidad antes mencionada así como propiedades generales demostradas en la sección siguiente (9), concretamente el párrafo 9.5.

Estudiamos luego los sistemas de raíces abstractos (sección 9) y explicamos brevemente su clasificación, lo que resulta en una clasificación de los posibles grupos de Weyl.

Finalmente, en la sección 10 mostramos que toda álgebra de Lie simple no compacta¹ es el álgebra de Lie del grupo de isometrías de un espacio globalmente simétrico de tipo no-compacto. Este hecho suele establecerse como consecuencia de la existencia de una forma real compacta para un álgebra compleja. En estas notas hacemos una prueba directa basada en un artículo de Donaldson [3]. Solo la sección 3 es formalmente necesaria para esta prueba.

¹i.e. tal que la forma de Killing no es definida

2. ACCIÓN DE $\text{isom}_0(\mathbf{X})$, GEODÉSICAS Y TENSOR DE CURVATURA

{gen}

En esta subsección registramos algunas observaciones generales que se deducen rápidamente de la definición:

Definición 2.1. Una variedad Riemanniana \mathbf{X} es *globalmente simétrica* si para todo punto $p \in \mathbf{X}$ existe una isometría global $\mathcal{J}_p : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ que fija p y tal que $d_p \mathcal{J}_p = -\text{id}$.

Sea $G := (\text{isom}(\mathbf{X}))_{\text{id}}$ la componente conexa de la identidad del grupo de isometrías de \mathbf{X} . Es un resultado general¹ que G es un grupo de Lie. Consideramos las siguientes aplicaciones,

- *actuar en o* : para $o \in \mathbf{X}$, $\pi_o : G \rightarrow \mathbf{X}$ se define como $\pi_o(g) = g \cdot o$;
- *multiplicar por g* : para $g \in G$, $\varphi_g : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ se define como $\varphi_g(p) = g \cdot p$.

2.1. Completitud. La primera observación a hacer es que \mathbf{X} es geodésicamente completo: en efecto si $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbf{X}$ es un segmento geodésico, la simetría central $s_{\alpha(t)} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ a lo largo de sus puntos permite extender α más allá de sus extremos.

2.2. Transitividad.

Observación. La acción de G es transitiva en \mathbf{X} , es decir, para todo $p \in \mathbf{X}$, π_p es sobreyectiva.

Demostración. Fijamos $p, q \in \mathbf{X}$. La simetría central en el punto medio de un segmento geodésico de p a q es una isometría que manda p en q . Sin embargo, nada garantiza que este elemento esté en la componente conexa de la identidad.

Consideramos entonces $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{X}$ una geodésica con $\alpha(0) = p$, que contiene a q y que minimize la distancia entre estos. La siguiente curva de isometrías

$$t \mapsto g_t = \mathcal{J}_{\alpha(t/2)} \mathcal{J}_p$$

verifica que $g_0 = \text{id}$, y además $g_{d(p,q)} \cdot p = q$, es decir $g_{d(p,q)}$ manda p en q y esta conectada a la identidad por una curva de isometrías. Esto concluye la prueba. \square

{estabilizador}

2.3. El estabilizador de un punto. Cada $o \in \mathbf{X}$ induce un morfismo involutivo $\tau^o : G \rightarrow G$ definido como

$$\tau^o : g \mapsto \mathcal{J}_o g \mathcal{J}_o.$$

En este párrafo mostramos la siguiente relación entre los puntos fijos de τ^o y el estabilizador de o en G .

Proposición. Los grupos $\text{Fix } \tau^o$ y $E_o(G)$ tienen la misma componente conexa de la identidad.

Demostración. Observamos primero que $E_o(G) \subset \text{Fix } \tau^o$: en efecto, si $k \in E_o(G)$ entonces las isometrías k y $\mathcal{J}_o k \mathcal{J}_o$ coinciden en o y tienen la misma diferencial en o , por lo tanto coinciden (ver A.20).

Recíprocamente, si $k \in (\text{Fix } \tau^o)_{\text{id}}$, como $\mathcal{J}_o k \mathcal{J}_o = k$, necesariamente $k \cdot o$ es un punto fijo de \mathcal{J}_o . Sin embargo, cerca de o , el único punto fijo de \mathcal{J}_o es o , en particular $k \cdot o = o$ para todo k de $\text{Fix } \tau^o$ cerca de la identidad. Como $(\text{Fix } \tau^o)_{\text{id}}$ es conexo se concluye la prueba. \square

¹i.e. el grupo de isometrías de una variedad Riemanniana es un grupo de Lie

Recordar que el estabilizador $E_o(G)$ es necesariamente un subgrupo cerrado¹ de G . Más aún, como la acción es por isometrías, el producto interno $(\cdot, \cdot)_o$ es preservado por la diferencial $d_o h$, para todo $h \in E_o(G)$. Concluimos que $E_o(G)$ es un subgrupo compacto de G , de donde $(\text{Fix } \tau^o)_{\text{id}}$ también lo es.

Introducimos la notación

$$K^o = (\text{Fix } \tau^o)_{\text{id}} = (E_o(G))_{\text{id}}.$$

2.4. Descomposición de \mathfrak{g} . Consideramos la diferencial en $\text{id} \in G$ de τ^o ; es un morfismo del álgebra de Lie, también involutivo $\sigma^o = d_{\text{id}}\tau^o : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, es decir tal que

- para todos $x, y \in \mathfrak{g}$ vale que² $[\sigma^o x, \sigma^o y] = [x, y]$,
- $(\sigma^o)^2 = \text{id}$.

Consideramos entonces la descomposición de \mathfrak{g} en espacios propios de σ^o : $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^o \oplus \mathfrak{p}^o$, donde

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}^o &= \{x \in \mathfrak{g} : \sigma^o(x) = x\} \\ \mathfrak{p}^o &= \{x \in \mathfrak{g} : \sigma^o(x) = -x\}. \end{aligned}$$

Como σ^o preserva el corchete de \mathfrak{g} se deducen directamente las siguiente relaciones:

- $[\mathfrak{k}^o, \mathfrak{k}^o] \subset \mathfrak{k}^o$, es decir que \mathfrak{k}^o es una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} ,
- $[\mathfrak{k}^o, \mathfrak{p}^o] \subset \mathfrak{p}^o$, es decir, \mathfrak{k}^o actúa en \mathfrak{p}^o ,
- $[\mathfrak{p}^o, \mathfrak{p}^o] \subset \mathfrak{k}^o$,
- si $\kappa_{\mathfrak{g}}$ es la *forma de Killing* de \mathfrak{g} , entonces $\mathfrak{k}^o \perp_{\kappa_{\mathfrak{g}}} \mathfrak{p}^o$. En efecto: $\kappa_{\mathfrak{g}}$ se define como (ver A.13)

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = \text{traza} \left(z \mapsto [x, [y, z]] \right);$$

si $x \in \mathfrak{k}^o$ e $y \in \mathfrak{p}^o$ entonces el mapa $z \mapsto \text{ad}_x \text{ad}_y(z) = [x, [y, z]] : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ verifica $\text{ad}_x(\text{ad}_y(\mathfrak{k}^o)) \subset \mathfrak{p}^o$ y $\text{ad}_x(\text{ad}_y(\mathfrak{p}^o)) \subset \mathfrak{k}^o$ de donde su traza es nula. Esta propiedad no la usaremos hasta bastante mas adelante.

Por definición, el grupo $K^o \subset G$ es un grupo compacto conexo cuya álgebra de Lie es \mathfrak{k}^o . El párrafo 2.3 implica que la diferencial en la identidad de la aplicación $\pi_o : G \rightarrow X$ tiene por núcleo \mathfrak{k}^o .

Definición. En particular, $\pi_o := d_{\text{id}}\pi_o|_{\mathfrak{p}^o} : \mathfrak{p}^o \rightarrow T_oX$ es un isomorfismo, su inversa se denota

$$\theta_o : T_oX \rightarrow \mathfrak{p}^o$$

y la aplicación $o \mapsto \theta_o$ se denomina la *forma de Maurer-Cartan* de X , es una 1-forma en X a valores en \mathfrak{g} .

Lema. Observar además que $\text{Ad}(g)(\mathfrak{k}^o) = \mathfrak{k}^{g \cdot o}$ y $\text{Ad}(g)(\mathfrak{p}^o) = \mathfrak{p}^{g \cdot o}$.

Demostración. □

Culminamos esta sección registrando la siguiente nomenclatura.

Observación. Como K^o es compacto y de álgebra \mathfrak{k}^o tenemos, en el lenguaje de la sección 6.1, que el par (\mathfrak{g}, σ^o) es *un par simétrico ortogonal efectivo*.

¹este es un hecho general

²esto es válido para la diferencial de un morfismo arbitrario entre grupos de Lie

{asso}

2.5. Qué pasa al multiplicar por g . Para $g \in G$ consideramos la *conjugación* por g , $\phi_g : G \rightarrow G$, definida como $\phi_g(h) = ghg^{-1}$. Recordemos que, por definición, $\text{Ad}(g) := d_{\text{id}}\phi_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$.

Lema. Tenemos $g\mathcal{J}_o g^{-1} = \mathcal{J}_{\varphi_g o}$.

Demostración. La isometría $g\mathcal{J}_o g^{-1}$ fija $\varphi_g o$ y su diferencial en ese punto es $-\text{id}$; ésta isometría coincide entonces con $\mathcal{J}_{\varphi_g o}$. \square

En consecuencia del Lema tenemos que $\tau^{g \cdot o} = \phi_g \circ \tau^o \circ \phi_{g^{-1}}$, y tomando diferenciales en la identidad obtenemos que $\sigma^{g \cdot o} = \text{Ad}(g)\sigma^{g \cdot o}\text{Ad}(g^{-1})$, de donde concluimos

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g)(\mathfrak{k}^o) &= \mathfrak{k}^{g \cdot o}, \\ \text{Ad}(g)(\mathfrak{p}^o) &= \mathfrak{p}^{g \cdot o}. \end{aligned} \tag{1}$$

La fórmula $g \cdot (h \cdot o) = ghg^{-1} \cdot (g \cdot o)$ equivale al diagrama conmutativo siguiente (a la izquierda) y tomando diferenciales obtenemos el de la derecha:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi_g} & G \\ \pi_o \downarrow & & \downarrow \pi_{g \cdot o} \\ \mathsf{X} & \xrightarrow{\varphi_g} & \mathsf{X} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{Ad}(g)} & \mathfrak{g} \\ \pi^o \downarrow & & \downarrow \pi^{g \cdot o} \\ \mathsf{T}_o \mathsf{X} & \xrightarrow{d_o \varphi_g} & \mathsf{T}_{\varphi_g o} \mathsf{X} \end{array}$$

Obtenemos así la fórmula siguiente.

Observación 2.2. Para todos $g \in G$, $p \in \mathsf{X}$ y $v \in \mathsf{T}_p \mathsf{X}$ vale $d_p \varphi_g(v) = \pi^p \text{Ad}(g)\theta_p(v)$.

Si $g \in K^o$, entonces $d_o \varphi_g$ va de $\mathsf{T}_o \mathsf{X}$ en sí mismo, podemos entonces tomar la "derivada respecto de g " de $d_o \varphi_g$ y obtenemos, como

$$\text{ad}(x) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \text{Ad}(e^{tx})$$

(ver A.1), el siguiente diagrama válido para todo $x \in \mathfrak{k}^o$:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{ad}(x)} & \mathfrak{g} \\ \pi^o \downarrow & & \downarrow \pi^o \\ \mathsf{T}_o \mathsf{X}_d & \xrightarrow{\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} d_o \varphi_{e^{tx}}} & \mathsf{T}_o \mathsf{X}_d \end{array}$$

Este último diagrama ilumina la acción de \mathfrak{k}^o en \mathfrak{p}^o dada por la fórmula $[\mathfrak{k}^o, \mathfrak{p}^o] \subset \mathfrak{p}^o$ e implica la siguiente ecuación conocida como la *ad $_{\mathfrak{k}^o}$ -asociatividad* de $(\cdot, \cdot)_o$, ecuación que usaremos en el párrafo 2.7 para calcular el tensor de curvatura.

Corolario. Para $x \in \mathfrak{k}^o$ e $y, z \in \mathfrak{g}$ se tiene $\left(\pi^o([y, x]), \pi^o(z) \right)_o = \left(\pi^o(y), \pi^o([x, z]) \right)_o$.

Demostración. La curva de isometrías e^{tx} fija el punto o . Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (d_o \varphi_{e^{tx}} \pi^o(y), d_o \varphi_{e^{tx}} \pi^o(z))_o \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} d_o \varphi_{e^{tx}} (\pi^o(y)), \pi^o(z) \right)_o \\ &\quad + \left(\pi^o(y), \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} d_o \varphi_{e^{tx}} (\pi^o(z)) \right)_o \quad (\text{Leibniz usual}) \\ &= \left(\pi^o([x, y]), \pi^o(z) \right)_o + \left(\pi^o(y), \pi^o([x, y]) \right)_o. \end{aligned}$$

□

{geodesicas}

2.6. Geodésicas de X . Comenzamos por un cálculo de diferencial de \mathcal{J}_o .

Lema. *Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow X_d$ una geodésica por $o \in X_d$. Entonces para todo t , la diferencial $d_{\alpha(t)} \mathcal{J}_o$ es $-P_t$, donde $P_t : T_{\alpha(t)} X_d \rightarrow T_{\alpha(-t)} X_d$ es el transporte paralelo a lo largo de α .*

Demostración. Se deduce inmediatamente del hecho general siguiente: las isometrías preservan la conexión de Levi-Civita, en particular, conmutan con el transporte paralelo sobre geodésicas, ver A.17. □

El objetivo de ese párrafo es demostrar lo siguiente.

Proposición. *Toda geodésica por o es de la forma $t \mapsto \pi_o(e^{tx})$ para $x \in \mathfrak{p}^o$.*

Es decir, la exponencial del grupo G y la exponencial Riemanniana $\exp_o : T_o X \rightarrow X$ coinciden cuando restringimos la primera a \mathfrak{p}^o :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{p}^o & \xrightarrow{\quad e^{\cdot} \quad} & G \\ \pi^o \downarrow & & \downarrow \pi_o \\ T_o X & \xrightarrow{\quad \exp_o \quad} & X \end{array}$$

Demostración. Sea $t \mapsto \alpha(t)$ una geodésica por o y denotamos por $\mathcal{J}_t = \mathcal{J}_{\alpha(t)}$ la simetría central en $\alpha(t)$. Observamos que la función $g_t = \mathcal{J}_{t/2} \mathcal{J}_o$ verifica:

- para todo $\alpha(t) = g_t \cdot o$;
- es un subgrupo a un parámetro de G , en efecto, para todos $u, v \in \mathbb{R}$ la isometría $\mathcal{J}_u \mathcal{J}_o \mathcal{J}_v = \mathcal{J}_{u+v}$ dado que ambas fijan $\alpha(u+v)$ y tienen la misma diferencial en ese punto. Para ver esto último se usa el lema de este párrafo.

Concluimos que existe $x \in \mathfrak{g}$ tal que $\mathcal{J}_{t/2} \mathcal{J}_o = e^{tx}$. Observamos entonces que

$$\tau^o(g_t) = \mathcal{J}_o e^{tx} \mathcal{J}_o = \mathcal{J}_o \mathcal{J}_{t/2} = \mathcal{J}_{-t/2} \mathcal{J}_o = e^{-tx}.$$

Tomando la derivada respecto de t vemos que $\sigma^o(x) = -x$, de donde se concluye que $x \in \mathfrak{p}^o$ y que $e^{tx} \cdot o = \alpha(t)$. □

{formulaR}

2.7. El tensor de curvatura de un espacio simétrico. Nos dirigimos a probar la siguiente fórmula, seguimos la estrategia de Maubon [7, Section 4.3]. Recordemos que el tensor de curvatura se define como

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Teorema (Fórmula de curvatura). *Sean X un espacio globalmente simétrico, $o \in X$ y $x, y, z \in \mathfrak{p}^o$, entonces*

$$R(\pi^o x, \pi^o y) \pi^o z = -\pi^o \left([[x, y], z] \right).$$

La prueba usa dos herramientas: para todo $x \in \mathfrak{p}^o$ el campo en X dado por

$$p \mapsto \pi^p(x) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} e^{tx} \cdot p$$

es un *campo de Killing* (es decir que el flujo asociado es por isometrías de X); y el hecho que para todos $x, y \in \mathfrak{p}^o$ el corchete $[x, y] \in \mathfrak{k}^o$ (párrafo 2.4) y por tanto el campo asociado tiene una singularidad en o , es decir que

$$\pi^o([x, y]) = 0.$$

Dividimos la prueba en tres subsecciones que decrecen en generalidad.

{formula.ad}

2.7.1. Campos asociados a una acción. Sean G un grupo de Lie, M una variedad diferenciable y $G \times M \rightarrow M$ una acción diferenciable. Cada $x \in \mathfrak{g}$ induce un campo X en M definido como, para $p \in M$,

$$\pi^p(x) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} e^{tx} \cdot p.$$

Estos campos verifican la siguiente relación que a continuación demostramos.

Proposición. Para todos $x, y \in \mathfrak{g}$ vale que $\pi^p([x, y]) = -[\pi^p(x), \pi^p(y)]$.

Demostración. Cuenta directa. □

2.7.2. Campos de Killing. Si $(M, (\cdot, \cdot))$ es una variedad Riemanniana, recordemos que un campo X en M es *de Killing* si su flujo asociado consiste en isometrías de M . Recordemos además que la conexión de Levi-Civita de M es la única conexión ∇ tal que para toda tripleta de campos (definidos en el mismo abierto) de M , X, Y, Z se tiene que

- $X(Y, Z) = (\nabla_X Y, Z) + (Y, \nabla_X Z)$,
- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

Proposición. Sea X un campo de Killing de M , entonces para cualquier par de campos Y, Z en M se tiene que

- $X(Y, Z) = ([X, Y], Z) + (Y, [X, Z])$,
- $(\nabla_Y X, Z) + (Y, \nabla_Z X) = 0$.

En particular, si X es Killing entonces para todo campo Y se tiene $(\nabla_Y X, Y) = 0$.

Demostración. Comenzamos por la primer ecuación. Consideramos el flujo (ϕ_t) de X que, por definición, consiste en isometrías de M . Tenemos entonces, para campos arbitrarios Y, Z de X que

$$\begin{aligned} (X(Y, Z))_p &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (Y(\phi_t p), Z(\phi_t p))_{\phi_t p} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (d_{\phi_t p} \phi_{-t} (Y(\phi_t p)), d_{\phi_t p} \phi_{-t} (Z(\phi_t p)))_p \quad (\phi_t \text{ isometría}) \\ &= \left(\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} d_{\phi_t p} \phi_{-t} (Y(\phi_t p)), Z(p) \right)_p \\ &\quad + \left(Y(p), \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} d_{\phi_t p} \phi_{-t} (Z(\phi_t p)) \right)_p \quad (\text{Leibniz usual}) \\ &= ([X, Y], Z) + (Y, [X, Z]), \end{aligned}$$

donde la última igualdad es por definición de corchete de Lie de campos, ver A.11. La segunda igualdad se deduce inmediatamente de la primera usando las dos propiedades que determinan la conexión de Levi-Civita. \square

Prueba de la fórmula de curvatura. Consideramos $o \in X$ y $x, y, z \in \mathfrak{p}^o$. Para simplificar escribimos $X(p) = \pi^p(x)$. Por definición, los campos X, Y, Z son de Killing.

El campo $\nabla_X Y$ se anula en o : En efecto, observamos que

$$\begin{aligned}
2(\nabla_X Y, Z) &= (\nabla_X Y, Z) - (X, \nabla_Z Y) && (Y \text{ de Killing}) \\
&= X(Y, Z) - (Y, \nabla_X Z) - (X, \nabla_Z Y) && (\text{Leibniz de } \nabla) \\
&= X(Y, Z) + (\nabla_Y Z, X) - (X, \nabla_Z Y) && (Z \text{ de Killing}) \\
&= X(Y, Z) + (X, [Y, Z]) && (\nabla \text{ sin torsión}) \\
&= ([X, Y], Z) + (Y, [X, Z]) + (X, [Y, Z]) && (X \text{ de Killing}).
\end{aligned}$$

Como $[X, Y](o) = \pi^o([x, y])$ (párrafo 2.7.1) vemos que, al evaluar en o , el último renglón es $= 0$ dado que tanto $[x, y]$, como $[y, z]$ y $[x, z]$, pertenecen a \mathfrak{k}^o . Como además $Z(o) \in T_o X$ es arbitrario, concluimos lo deseado.

Calculamos las curvaturas seccionales de X , éstas determinan el tensor de curvatura (ver por ejemplo do Carmo [2, Cap. IV, Lema 3.3]). Recordemos que la curvatura seccional del plano generado por $u, v \in T_o X$ está definida como

$$\mathbb{k}(\mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}v) = \frac{-(R(u, v)u, v)_o}{(u, u)_o(v, v)_o - (u, v)_o^2}. \quad (2) \quad \{\mathbf{Ksectional}\}$$

Queremos mostrar que si $x, y \in \mathfrak{p}^o$ entonces

$$(R(X, Y), X, Y)_o = -\left(\pi^o\left([x, y], x\right), \pi^o(y)\right). \quad (3) \quad \{\mathbf{RR}\}$$

Escribiendo la definición de R , tenemos que calcular

$$(\nabla_X \nabla_Y X, Y) - (\nabla_Y \nabla_X X, Y) - (\nabla_{[X, Y]} X, Y)$$

en el punto o . Como $[X, Y](o) = -\pi^o([x, y]) = 0$ porque $[x, y] \in \mathfrak{k}^o$, el último término se anula en o . Calculamos entonces el primer término:

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \nabla_Y X, Y)_o &= X(\nabla_Y X, Y) - (\nabla_Y X, \nabla_X Y)_o && (\text{definición de } \nabla) \\
&= X(\nabla_Y X, Y) && (\nabla_X Y(o) = 0) \\
&= 0 && (X \text{ Killing} \Rightarrow (\nabla_Y X, Y) \equiv 0)
\end{aligned}$$

Nos queda entonces calcular el término intermedio:

$$\begin{aligned}
-(\nabla_Y \nabla_X X, Y) &= -Y(\nabla_X X, Y) + (\nabla_X X, \nabla_Y Y)_o && \text{(definición de } \nabla) \\
&= -Y(\nabla_X X, Y) && (\nabla_Y Y(o) = 0) \\
&= -Y(X(X, Y)) && \text{(definición de } \nabla \text{ y } Y \text{ Killing)} \\
&= -Y((X, [X, Y])) && (X \text{ Killing)} \\
&= -([Y, X], [X, Y])_o - (X, [Y, [X, Y]])_o && (Y \text{ Killing)} \\
&= -(X, [Y, [X, Y]])_o && ([x, y] \in \mathfrak{k}^o) \\
&= -([X, [Y, X]], Y)_o && ([x, y] \in \mathfrak{k}^o \text{ y } (\cdot)_o \text{ es } \text{ad}_{\mathfrak{k}^o}\text{-asociativa)} \\
&= -(\pi^o([x, y], x), \pi^o(y))_o,
\end{aligned}$$

como buscado. □

3. UN ESPACIO GLOBALMENTE SIMÉTRICO ASOCIADO A $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$

{SL}

Consideramos el espacio de productos internos en \mathbb{R}^d modulo homotecia:

$$\mathcal{X}_d = \{\text{productos internos en } \mathbb{R}^d\} / \mathbb{R}_+.$$

Es el proyectivizado de un cono abierto convexo del espacio vectorial $\mathcal{S}^2((\mathbb{R}^d)^*)$ de formas bilineales simétricas en \mathbb{R}^d , en particular es contractible.

3.1. El espacio tangente a $o \in \mathcal{X}_d$. La acción de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ en \mathcal{X}_d definida como

$$(g \cdot o)(v, w) = o(g^{-1}v, g^{-1}w)$$

es *transitiva*, es decir, dados $p, q \in \mathcal{X}_d$ existe $g \in \mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ tal que $g \cdot p = q$. Consideramos las aplicaciones,

- *actuar en o* : para $o \in \mathcal{X}_d$ por $\pi_o : \mathrm{SL}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{X}_d$, $\pi_o(g) = g \cdot o$,
- *multiplicar por g* : para $g \in \mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ por $\varphi_g : \mathcal{X}_d \rightarrow \mathcal{X}_d$, $\varphi_g(p) = g \cdot p$.

{diagrama1}

Observación 3.1. Para $g \in \mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ consideramos la *conjugación* por g , $\phi_g : \mathrm{SL}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ definida como $\phi_g(h) = ghg^{-1}$. La formula $g \cdot (h \cdot o) = ghg^{-1} \cdot (g \cdot o)$ equivale al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}_d(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\phi_g} & \mathrm{SL}_d(\mathbb{R}) \\ \pi^o \downarrow & & \downarrow \pi^{g \cdot o} \\ \mathcal{X}_d & \xrightarrow{\varphi_g} & \mathcal{X}_d \end{array}$$

Nos dirigimos a definir una métrica Riemannianna globalmente simétrica en \mathcal{X}_d . Con este fin, fijamos $o \in \mathcal{X}_d$ y recordamos que este induce una *transformación adjunta*, definida para $T \in \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}) = \{\text{matrices } d \times d\}$ como, para todos $v, w, \in \mathbb{R}^d$,

$$o(Tv, w) = o(v, T^{*o}w).$$

Observar que la aplicación $T \mapsto T^{*o}$ no depende del producto interno elegido en la clase o . La fórmula

$$T = \frac{T - T^{*o}}{2} + \frac{T + T^{*o}}{2}$$

muestra que tenemos una descomposición de

$$\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) = \{\text{matrices } d \times d \text{ de traza } 0\} = \mathrm{T}_{\mathrm{id}}\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$$

como $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) = \mathfrak{k}^o \oplus \mathfrak{p}^o$ donde

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}^o &= \{T \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) : T = -T^{*o}\} \\ &= \{T \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) : \forall v, w \text{ vale } o(Tv, w) + o(v, Tw) = 0\} \\ \mathfrak{p}^o &= \{T \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) : T = T^{*o}\} \\ &= \{T \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) \text{ diagonalizable en una base } o\text{-ortogonal}\} \end{aligned}$$

De la segunda igualdad en \mathfrak{k}^o se deduce que este espacio es de hecho el algebra de Lie del grupo

$$K^o = \{g \in \mathrm{SL}_d(\mathbb{R}) : g \cdot o = o\}$$

que estabiliza o , alcanza con derivar en $g = \mathrm{id}$ la ecuación $o(gv, gw) = o(v, w)$.

Como la acción de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ es transitiva, se tiene que la diferencial

$$\pi^o := d_{\mathrm{id}}\pi_o : \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{T}_o\mathcal{X}_d$$

de la aplicación π_o , es sobreyectiva. Más aún, como $\pi_o(g) = o$ si y solo si $g \in K^o$, el núcleo $\ker \pi^o = \mathfrak{k}^o$ y por lo tanto $\pi^o|_{\mathfrak{p}^o} : \mathfrak{p}^o \rightarrow \mathrm{T}_o\mathcal{X}$ es un isomorfismo. Denotamos su aplicación inversa por $\theta_o : \mathrm{T}_o\mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{p}^o$, la familia de aplicaciones $o \mapsto \theta_o : \mathrm{T}_o\mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$ es llamada la *forma de Maurer-Cartan* de \mathcal{X}_d .

{ksl}

3.2. Una métrica globalmente simétrica en \mathcal{X}_d . Consideramos la forma bilineal¹ simétrica $\kappa : \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $\kappa(A, B) = \mathrm{traza}(AB)$. Como la traza es invariante por conjugación, la forma κ es invariante por la acción por conjugación de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ en $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$, también llamada la acción *adjunta* $\mathrm{Ad}(g)(T) = gTg^{-1}$. Observamos además que:

- κ es definida negativa en \mathfrak{k}^o ; en efecto, si T es anti-simétrica, sus coeficientes (m_{ij}) es una base o -ortogonal verifican $m_{ij} = -m_{ji}$. La traza de T^2 es entonces

$$\kappa(T, T) = - \sum_{i,j} m_{ij}^2 \leq 0$$

y es igual a 0 si y solo si $T = 0$.

- κ es definida positiva en \mathfrak{p}^o ; se deduce de una cuenta análoga.
- $\kappa(\mathfrak{k}^o, \mathfrak{p}^o) = 0$; basta observar que si $A \in \mathfrak{k}^o$ y $B \in \mathfrak{p}^o$ entonces

$$\mathrm{traza}(AB) = \mathrm{traza}((AB)^{*o}) = \mathrm{traza}(-BA) = -\mathrm{traza}(AB).$$

En particular κ es no degenerada.

Definimos entonces la métrica de \mathcal{X}_d como $o \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_o$ donde

$$\langle v, w \rangle_o := \kappa(\theta_o(v), \theta_o(w))$$

{isoSL}

Observación 3.2. Para todo $g \in \mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$, la aplicación $\varphi_g : \mathcal{X}_d \rightarrow \mathcal{X}_d$ es una isometría.

Demostración. Comenzamos por observar que la involución adjunta verifica $*_{g \cdot o} = \mathrm{Ad}(g) \circ *_{o}$, es decir, para toda $T \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$ vale $T^{*_{g \cdot o}} = gT^{*_{o}}g^{-1}$. En efecto,

$$\begin{aligned} (g \cdot o)(gTg^{-1}v, w) &= o(Tg^{-1}v, g^{-1}w) && \text{(por definición de la acción)} \\ &= o(g^{-1}v, T^{*_{o}}g^{-1}w) \\ &= (g \cdot o)(v, gT^{*_{o}}g^{-1}w) && \text{(por definición de la acción)}. \end{aligned}$$

Se tiene además el siguiente diagrama conmutativo, que se deduce del la Observación 3.1 tomando diferenciales y recordando que $\theta_o : \mathrm{T}_o\mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{p}^o$ es la inversa de π^o :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathrm{Ad}(g)} & \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) \\ \theta_o \uparrow & & \uparrow \theta_{g \cdot o} \\ \mathrm{T}_o\mathcal{X}_d & \xrightarrow{d_o\varphi_g} & \mathrm{T}_{g \cdot o}\mathcal{X}_d \end{array}$$

¹es un múltiplo de la forma de Killing de $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$.

Como $\text{Ad}(g) : \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$ preserva κ , se deduce que para $v, w \in \mathbb{T}_o\mathbb{X}_d$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle_o &= \kappa(\theta_o(v), \theta_o(w)) \\ &= \kappa\left(\text{Ad}(g)(\theta_o(v)), \text{Ad}(g)(\theta_o(w))\right) \\ &= \kappa\left(\theta_{g \cdot o}(d_o\varphi_g(v)), \theta_{g \cdot o}(d_o\varphi_g(w))\right) \\ &= \langle d_o\varphi_g(v), d_o\varphi_g(w) \rangle_{g \cdot o}, \end{aligned}$$

lo que queríamos demostrar. \square

Estamos en posición de demostrar que $(\mathbb{X}_d, o \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_o)$ es un espacio globalmente simétrico. Es importante remarcar que haremos esto sin tener una descripción explícita de las geodésicas (cosa que haremos en el párrafo 3.3). La clave es el morfismo involutivo $\tau^o : \text{SL}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \text{SL}_d(\mathbb{R})$ determinado por un punto o de \mathbb{X}_d y definido como

$$\tau^o(g) = (g^{*o})^{-1}.$$

Es importante remarcar que:

- es un morfismo de grupos con $K^o = \text{Fix}(\tau^o)$,
- su diferencial en id es $\sigma^o(T) := d_{\text{id}}\tau^o(T) = -T^{*o}$, y por lo tanto se tiene $\sigma^o|_{\mathfrak{k}^o} = \text{id}$ y $\sigma^o|_{\mathfrak{p}^o} = -\text{id}$.

{Xdsimetrico}

Proposición 3.3. *El espacio $(\mathbb{X}_d, o \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_o)$ es globalmente simétrico.*

Demostración. Observamos que alcanza con encontrar, para cada $o \in \mathbb{X}_d$, una isometría global $\mathcal{J}_o : \mathbb{X}_d \rightarrow \mathbb{X}_d$ con $\mathcal{J}_o o = o$ y $d_o\mathcal{J}_o = -\text{id}$. Una tal isometría, al mandar geodésicas en geodésicas, sera necesariamente (en un entorno de o) la simetría central respecto de o . Para $p \in \mathbb{X}_d$ elegimos h tal que $p = h \cdot o$ y ponemos

$$\mathcal{J}_o(p) = \mathcal{J}_o(h \cdot o) := \tau^o(h) \cdot o.$$

Observamos primero que \mathcal{J}_o está bien definida, es decir que no depende del elemento $h \in \text{SL}_d(\mathbb{R})$ tal que $h \cdot o = p$. Esto se deduce de que $\tau^o(k) = k$ para todo k que fija o .

Para ver que \mathcal{J}_o es una isometría global fijamos $g \in \text{SL}_d(\mathbb{R})$ y comenzamos por mostrar la siguiente relación válida para todo $g \in \text{SL}_d(\mathbb{R})$

$$\mathcal{J}_o\varphi_g = \varphi_{\tau^o(g)}\mathcal{J}_o. \quad (4) \quad \{\text{inv}\}$$

En efecto, si $p = h \cdot o$ entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_o\varphi_g(p) &= \mathcal{J}_o\varphi_g(h \cdot o) = \mathcal{J}_o(gh \cdot o) \\ &= \tau^o(gh) \cdot o = (\tau^o(g)\tau^o(h)) \cdot o \\ &= \tau^o(g) \cdot \mathcal{J}_o(p) = \varphi_{\tau^o(g)}\mathcal{J}_o. \end{aligned}$$

Por otro lado, para todo $v \in \mathbb{T}_o\mathbb{X}_d$ se tiene que

$$\begin{aligned} d_{\varphi_g(o)}\mathcal{J}_o(d_o\varphi_g(v)) &= d_o\mathcal{J}_o\varphi_g(v) \\ &= d_o\varphi_{\tau^o(g)}\mathcal{J}_o(v) \quad (\text{por la ecuación (4)}) \\ &= -d_o\varphi_{\tau^o(g)}(v) \quad (\text{porque } d_o\mathcal{J}_o = -\text{id}). \end{aligned}$$

Como para todo $h \in \mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ la aplicación φ_h es una isometría (Observación 3.2) se tiene que $\varphi_{\tau^\circ(g)}$ es una isometría de X_d y los menos se cancelan, concluimos que para todos $u, v \in \mathsf{T}_o\mathsf{X}_d$ vale

$$\begin{aligned} \left\langle d_{\varphi_g(o)}\mathcal{J}_o(d_o\varphi_g(u)), d_{\varphi_g(o)}\mathcal{J}_o(d_o\varphi_g(v)) \right\rangle_{\mathcal{J}_o(g \cdot o)} &= \langle u, v \rangle_o \\ &= \langle d_o\varphi_g(u), d_o\varphi_g(v) \rangle_{g \cdot o}, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. \square

{geodXd}

3.3. Geodésicas de X_d . No tenemos los medios aún para demostrar que $\mathrm{PSL}_d(\mathbb{R})$ coincide con el grupo de isometrías $\mathrm{isom}_0(\mathsf{X}_d)$. Observar, por ejemplo, que $\mathrm{PSL}_d(\mathbb{R})$ no actúa transitivamente en el fibrado unitario UX_d . La siguiente observación jugará un papel en remontar este problema.

{so=tau}

Observación. Como \mathcal{J}_o es una isometría de X_d , tenemos una involución del grupo $\mathrm{isom}_0(\mathsf{X}_d)_0$ dada por,

$$\Psi_o(f) = \mathcal{J}_o \circ f \circ \mathcal{J}_o.$$

La ecuación (4) muestra que, en $\mathrm{PSL}_d(\mathbb{R})$, esta involución coincide con τ° . Consecuentemente, si notamos por \mathfrak{J} el álgebra de Lie de $\mathrm{isom}(\mathsf{X}_d)$ y consideramos

$$\tilde{\mathfrak{p}}^o = \{x \in \mathfrak{J} : d_{\mathrm{id}}\Psi_o(x) = -x\},$$

entonces $\tilde{\mathfrak{p}}^o = \mathfrak{p}^o$. En efecto, ambos tienen la dimensión de $\mathsf{T}_o\mathsf{X}_d$ y por la ecuación (4) tenemos $\mathfrak{p}^o \subset \tilde{\mathfrak{p}}^o$.

Esta observación y el cálculo de geodésicas del párrafo 2.6 dan inmediatamente la proposición siguiente.

Proposición. *La geodésica por $o \in \mathsf{X}_d$ de velocidad $v \in \mathsf{T}_o\mathsf{X}_d$ es la curva $t \mapsto \pi_o(e^{t\theta_o(v)})$. Recíprocamente, si $x \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$ entonces la curva $t \mapsto \pi_o(e^{tx})$ es geodésica si y solo si $x \in \mathfrak{p}^o$.*

En otras palabras, las geodésicas de X_d se obtienen como sigue. Fijamos un producto interno o de \mathbb{R}^d y consideramos $x \in \mathfrak{p}^o$. Por definición x es una matriz simétrica respecto de o , por ende es diagonalizable en una base o -ortogonal de \mathbb{R}^d , sea \mathcal{E} el conjunto de rectas asociadas a los vectores de esta base. Pongamos, para $\ell \in \mathcal{E}$, $\lambda_u(x) =$ valor propio de x en ℓ , es decir, para todo $u \in \ell$,

$$x(u) = \lambda_x(\ell)u.$$

Recordemos que $\pi^\circ(e^{tx})$ es el producto interno (modulo homotecias) definido como $\pi^\circ(e^{tx})(v, w) = o(e^{-tx}v, e^{-tx}w)$. Observamos entonces que durante todo el camino geodésico $\pi^\circ(e^{tx})$ se tiene

- \mathcal{E} es $\pi^\circ(e^{tx})$ ortogonal,
- para toda $\ell \in \mathcal{E}$ y $u \in \ell$ se tiene $\frac{\pi^\circ(e^{tx})(u, u)}{o(u, u)} = e^{-2t\lambda_\ell(x)}$.

Ver la figura 2.

{curvaturaSL}

3.4. Curvatura.

Lema. *La forma κ es $\mathrm{ad}_{\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})}$ -asociativa.*

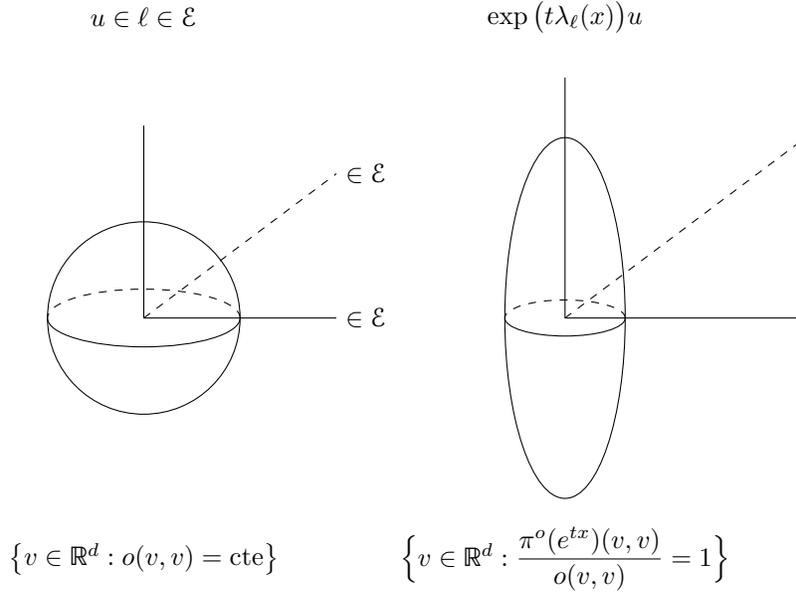


FIGURA 2. El camino geodésico por $(o, \pi^o(x)) \in \text{TX}$. Para todo t , las rectas de \mathcal{E} son ejes de las elipses $\{v : \pi^o(e^{tx})(v, v) = \text{cte}\}$. Para $\ell \in \mathcal{E}$ la o -norma de $u \in \ell$ cambia como $\exp(t\lambda_\ell(x))$.

{elipses}

Demostración. El resultado es válido en general, ver A.13. Hay que mostrar que para todos $x, y, z \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$ vale $\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z])$. Esto se deduce de la invariancia de κ por $\text{Ad}(g)$ para todo $g \in \text{SL}_d(\mathbb{R})$; o directamente haciendo la cuenta. \square

Corolario. Para $x, y \in \mathfrak{p}^o$ la curvatura seccional del plano por $\pi^o(x)$ y $\pi^o(y)$ es

$$\mathbb{k}(\pi^o(\mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y)) = \frac{\kappa([x, y], [x, y])}{\kappa(x, x)\kappa(y, y) - \kappa(x, y)^2}.$$

En particular es ≤ 0 e igual a 0 si y solo si $[x, y] = 0$.

Demostración. De la fórmula de curvatura, específicamente de la ecuación (2) para la definición de \mathbb{k} y de la ecuación (3), se deduce que

$$\begin{aligned} \mathbb{k}(\pi^o(\mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y)) &= \frac{\kappa\left(\left[[x, y], x\right], y\right)}{\kappa(x, x)\kappa(y, y) - \kappa(x, y)^2} \\ &= \frac{\kappa([x, y], [x, y])}{\kappa(x, x)\kappa(y, y) - \kappa(x, y)^2}, \end{aligned}$$

porque κ es $\text{ad}_{\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})}$ -asociativa. Finalmente, como $x, y \in \mathfrak{p}^o$ el corchete $[x, y] \in \mathfrak{k}^o$, de donde $\kappa([x, y], [x, y]) \leq 0$ y es igual a cero si y solo si $[x, y] = 0$. \square

3.5. Planos geodésicos maximales. El objetivo de esta sección es explicar la siguiente biyección:

{planosSL}

$$\left\{ \text{subvariedad conexa totalmente geodésica plana maximal de } \mathcal{X}_d \text{ por } o \right\}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ 1:1 \\ \downarrow \end{array}$$

$$\left\{ \text{descomposicion de } \mathbb{R}^d \text{ en suma de } d \text{ rectas } o\text{-ortogonales} \right\}$$

Recordamos que una subvariedad es *totalmente geodésica* si las geodésicas de la métrica inducida son geodésicas del espacio ambiente. Nos referimos a *plana* como de curvatura constante = 0, en el caso “totalmente geodésico” el cálculo de curvatura puede hacerse con la métrica inducida o la métrica ambiente. Finalmente, la *maximalidad* es respecto de la inclusión como subvariedades.

La correspondencia viene dada por la siguiente proposición. Consideramos $o \in \mathcal{X}_d$ y \mathcal{E} un conjunto o -ortogonal de d rectas de \mathbb{R}^d . Consideramos entonces el subespacio de \mathfrak{p}^o de las matrices o -simétricas diagonalizables en \mathcal{E} :

$$\mathfrak{a}_{\mathcal{E}} = \{x \in \mathfrak{p}^o : x \text{ diagonalizable en } \mathcal{E}\}.$$

Observar que

$$\pi_o(e^{\mathfrak{a}_{\mathcal{E}}}) = \{p \in \mathcal{X}_d : \mathcal{E} \text{ es } p\text{-ortogonal}\}.$$

Proposición. *El conjunto $\pi_o(e^{\mathfrak{a}_{\mathcal{E}}})$ es una subvariedad plana totalmente geodésica maximal por o . Toda subvariedad plana totalmente geodésica maximal de \mathcal{X}_d se obtiene de esta manera.*

Mostrar que $\pi_o(e^{\mathfrak{a}_{\mathcal{E}}})$ es una subvariedad plana totalmente geodésica no requiere el cálculo de curvatura del párrafo 3.4, sin embargo, la maximalidad y la unicidad sí.

Demostración. Consideramos la aplicación $f : \mathfrak{a}_{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{X}_d$ definida como $f(w) = \pi_o(e^w)$. Mostraremos que f es una isometría entre el espacio Euclideo $(\mathfrak{a}_{\mathcal{E}}, \kappa|_{\mathfrak{a}_{\mathcal{E}}})$ y su imagen, que manda geodésicas de $\mathfrak{a}_{\mathcal{E}}$ en geodésicas de \mathcal{X}_d . Comenzamos por un cálculo de diferencial. Sean $u, v \in \mathfrak{a}_{\mathcal{E}}$, entonces

$$\begin{aligned} d_u f(v) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} f(u + tv) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \pi_o(e^{u+tv}) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \pi_{e^u \cdot o}(e^{tv}) \quad (\text{porque } vu - uv = 0) \\ &= \pi^{e^u \cdot o}(v). \end{aligned}$$

Como mencionado anteriormente, para todo $u \in \mathfrak{a}_{\mathcal{E}}$, el conjunto \mathcal{E} es $\pi_o(e^u)$ -ortogonal. Tenemos entonces que si $v \in \mathfrak{a}_{\mathcal{E}}$, es decir, si v es diagonalizable en \mathcal{E} , entonces simétrica respecto de $\pi_o(e^u) = e^u \cdot o$, en otras palabras: $v \in \mathfrak{p}^{e^u \cdot o}$. En particular, para todos $u, v \in \mathfrak{a}_{\mathcal{E}}$ vale que

$$\theta_{e^u \cdot o}(\pi^{e^u \cdot o}(v)) = v.$$

Si calculamos entonces, para $w \in \mathfrak{a}_{\mathcal{E}}$

$$\begin{aligned} \langle d_u f(v), d_u f(w) \rangle_{f(u)} &= \langle \pi^{e^u \cdot o}(v), \pi^{e^u \cdot o}(w) \rangle_{e^u \cdot o} && \text{(cálculo de } d_u f) \\ &= \kappa \left(\theta_{e^u \cdot o}(\pi^{e^u \cdot o}(v)), \theta_{e^u \cdot o}(\pi^{e^u \cdot o}(w)) \right) && \text{(def. de } \langle \cdot, \cdot \rangle) \\ &= \kappa(v, w), \end{aligned}$$

como buscado. Tenemos del párrafo 3.3 que, como $v \in \mathfrak{p}^{e^u \cdot o}$, la curva

$$t \mapsto f(u + tv) = \pi_{e^u \cdot o}(e^{tv})$$

es la geodésica por $f(u)$ de velocidad $d_u f(v)$.

Para demostrar la maximalidad, y el hecho que todo plano geodésico maximal se obtiene de esta forma, usamos el cálculo de curvatura seccional del párrafo 3.4, especialmente el hecho que si $x, y \in \mathfrak{p}^o$ son tal que $\mathbb{k}(\pi^o(\mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y)) = 0$ entonces $[x, y] = 0$.

Si A es una subvariedad totalmente geodésica entonces la curvatura seccional de la métrica inducida en A coincide con la curvatura seccional de X_d . En particular si A es plana se tiene que para todos $x, y \in \mathfrak{a} := \theta_o(\mathbb{T}_o A)$ se tiene $[x, y] = \{0\}$, es decir, \mathfrak{a} es una subálgebra Abelianas de \mathfrak{p}^o . Si además A es maximal, entonces \mathfrak{a} es una subálgebra abeliana maximal de \mathfrak{p}^o .

Como los elementos de \mathfrak{a} son diagonalizables (en un conjunto o -ortogonal) y conmutan, son entonces simultáneamente diagonalizables en un conjunto o -ortogonal \mathcal{E} , la maximalidad de \mathfrak{a} implica que \mathcal{E}' es un conjunto maximal de rectas o -ortogonales. Esto termina la prueba. \square

Registramos el siguiente corolario inmediato de la proposición:

Corolario. *El group K^o actúa transitivamente en el conjunto de planos geodésicos maximales por o .*

Demostración. En efecto, K^o actúa transitivamente en las descomposiciones o -ortogonales de \mathbb{R}^d en d rectas. \square

3.6. Sistema de raíces restringidas y cámaras de Weyl. Consideramos $o \in X_d$, \mathcal{E} un conjunto de d rectas de \mathbb{R}^d o -ortogonal. El conjunto $\pi_o(e^{a_{\mathcal{E}}})$ es un plano totalmente geodésico maximal de X_d . Consideramos $x \in \mathfrak{a}_{\mathcal{E}}$, el vector $\pi^o(x)$ es tangente al plano $\pi_o(e^{a_{\mathcal{E}}})$, nos preguntamos entonces

¿cuales son los planos geodésicos maximales que pasan por $(o, \pi^o(x))$?

Usando el párrafo 3.5, la pregunta se reformula de la siguiente manera:

¿cuales son los conjuntos o -ortogonales \mathcal{E}' de d rectas en los cuales x es diagonalizable?

La respuesta está en las coincidencias de los valores propios de x . Por ejemplo, si todos sus valores propios son distintos entonces \mathcal{E} es el único conjunto donde x es diagonalizable y por lo tanto $\pi_o(e^{a_{\mathcal{E}}})$ es el único plano que pasa por $(o, \pi^o(x))$.

Consideramos entonces, para $\ell \in \mathcal{E}$ el mapa lineal $\lambda_{\ell} : \mathfrak{a}_{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{R}$ definido como

$$\lambda_{\ell}(x) = \text{valor propio de } x \text{ en } \ell,$$

y mas importante las diferencias, para $\ell, u \in \mathcal{E}$ distintas $\alpha_{\ell, u} = \lambda_{\ell} - \lambda_u \in (\mathfrak{a}_{\mathcal{E}})^*$. El conjunto (finito) de formas lineales

$$\Phi = \{\alpha_{\ell, u} : \ell, u \in \mathcal{E}\}$$

{camaras}

es llamado el *sistema de raíces restringido* de $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$. Los núcleos de los elementos de Φ son un conjunto finito de hiperplanos de $\mathfrak{a}_\mathcal{E}$, consideramos una componente conexa del complemento de estos, es decir de

$$\mathfrak{a}_\mathcal{E} - \bigcup_{\alpha \in \Phi} \ker \alpha,$$

y tomamos su clausura topológica, un tal conjunto es llamado *una cámara de Weyl*.

Los elementos en el interior de una cámara pertenecen a un único plano maximal geodésico de X_d , mientras que los elementos en el borde una cámara pertenecen a familias de planos geodésicos maximales. Esta familia viene de hecho parametrizada por el grupo $E_x(K^o)$.

La figura 3 muestra el sistema de raíces restringtas de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$.

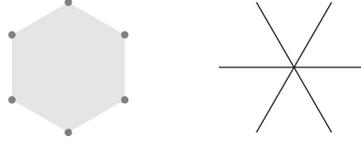


FIGURA 3. El sistema de raíces restringtas de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ a la izquierda, a la derecha los núcleos de la raíces

{s13}

Observamos lo siguiente:

Observación. La elección de una cámara de Weyl es equivalente a la elección de un orden total en \mathcal{E} .

Demostración. En efecto, si \mathfrak{a}^+ es una componente conexa de $\mathfrak{a}_\mathcal{E} - \bigcup_{\alpha \in \Phi} \ker \alpha$ entonces, por definición, un elemento $\alpha \in \Phi$ verifica una de dos:

$$\alpha|\mathfrak{a}^+ \geq 0 \text{ ó } \alpha|\mathfrak{a}^+ \leq 0.$$

Decimos entonces que $\ell > u$ si $\alpha_{\ell,u}|\mathfrak{a}^+ \geq 0$. Observar que es un orden dado que si $\ell > u > v$ entonces se tiene

$$\alpha_{\ell,v}|\mathfrak{a}^+ = \alpha_{\ell,u}|\mathfrak{a}^+ + \alpha_{u,v}|\mathfrak{a}^+ \geq 0,$$

es decir $\ell > v$. Podemos escribir entonces $\mathcal{E} = \{\ell_i\}_1^d$ con $\ell_i > \ell_j$ si $i > j$. Un elemento $a \in \mathfrak{a}_\mathcal{E}$ pertenece a la cámara elegida \mathfrak{a}^+ si y solo si los valores propios de a en la base *ordenada* $\mathcal{E} = \{\ell_i\}_1^d$ son decrecientes. \square

Fijamos una cámara \mathfrak{a}^+ , con el orden asociado $\mathcal{E} = \{\ell_i\}_{i=1}^{d-1}$ y escribimos $\alpha_i = \alpha_{\ell_i, \ell_{i+1}}$. El conjunto

$$\Delta := \{\alpha_i : i \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket\}$$

es llamado el *conjunto de raíces restringtas simples* asociado a la cámara \mathfrak{a}^+ .

{K-orbitasU}

3.7. La estratificación en K^o -orbitas de la esfera unidad U_oX . Recordemos que la acción de K^o en T_oX_d es conjugada, via π^o , a la acción $\text{Ad}(K^o) : \mathfrak{p}^o \rightarrow \mathfrak{p}^o$. El objetivo de este párrafo es estudiar las órbitas de esta acción en la esfera unidad

$$U\mathfrak{p}^o = \{x \in \mathfrak{p}^o : \kappa(x, x) = 1\},$$

invariante por la acción de K^o dado que este grupo preserva κ (y \mathfrak{p}^o).

Observar que la acción no es transitiva: como la acción de K^o en \mathfrak{p}^o es por conjugación, $\text{Ad}(k)x = kxk^{-1}$, los valores propios de x son un invariante de la órbita de x .

Fijamos \mathcal{E} d rectas o -ortogonales el espacio $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}^o$ asociado. Fijamos además una cámara \mathfrak{a}^+ con el orden asociado $\mathcal{E} = \{\ell_i\}_{i=1}^{d-1}$ y escribimos $\alpha_i = \alpha_{\ell_i, \ell_{i+1}}$. El conjunto

$$\Delta := \{\alpha_i : i \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket\}$$

es llamado el *conjunto de raíces simples* asociado a la cámara \mathfrak{a}^+ .

Comenzamos por mostrar lo siguiente.

Proposición 3.4. *El espacio de órbitas Up^o/K^o se identifica naturalmente a $\{a \in \mathfrak{a}^+ : \kappa(a, a) = 1\}$.*

Demostración. Por el corolario del párrafo 3.5 K^o actúa transitivamente en el espacio de planos totalmente geodésicos por o : todo elemento $x \in \text{Up}^o$ es llevado por un elemento de K^o a \mathfrak{a} . Más aún, los elementos de K^o que preservan \mathfrak{a} son aquellos cuya acción en \mathbb{R}^d preserva el conjunto \mathcal{E} . Este subgrupo de K^o es isomorfo al grupo de permutaciones de los elementos de \mathcal{E} . En efecto, si $\ell, u \in \mathcal{E}$, la rotación de ángulo $\pi/2$ en el plano $\ell \oplus u$ (y la identidad en su ortogonal) es un elemento de K^o que permuta ℓ con u y fija el resto de los elementos de \mathcal{E} .

Este grupo actúa transitivamente en el conjunto de cámaras de Weyl de $\mathfrak{a}_{\mathcal{E}}$ y el estabilizador de una cámara es el grupo M de matrices diagonales en \mathcal{E} con entradas ± 1 y de determinante 1.

La transitividad de la acción en el conjunto de cámaras se deduce entonces la biyección equivariante $\{\text{cámaras de Weyl}\} \leftrightarrow \{\text{ordenes totales en } \mathcal{E}\}$ del párrafo 3.6. Finalmente, si $k \in K^o$ preserva \mathcal{E} y un orden total dado, entonces k preserva cada elemento de \mathcal{E} , es decir, $k \in M$ de donde su acción en \mathfrak{a} es trivial. \square

Tenemos entonces que todo vector de Up^o es llevado por algún elemento de K^o a una cámara (cerrada) \mathfrak{a}^+ dada.

Estudiamos entonces el estabilizador en K^o de un $a \in \mathfrak{a}^+$.

{visualXd}

3.8. El borde visual de X_d y la acción de $\text{PSL}_d(\mathbb{R})$. Recordemos de A.7 que el *borde visual* $\partial_\infty X_d$ de X_d es el espacio de clases de equivalencia de rayos geodésicos, donde dos rayos $r, r' : [0, \infty) \rightarrow X_d$ son equivalentes si la aplicación

$$t \mapsto d(r(t), r'(t))$$

está acotada en $[0, \infty)$. Para cada $p \in X_d$, la aplicación $U_o X_d \rightarrow \partial_\infty X_d$ dada por tomar la clase del rayo por v ,

$$v \mapsto [\gamma_v | [0, \infty)],$$

es un homeomorfismo K^o -equivariante.

Consideramos, para $x \in \mathfrak{p}^o$, la descomposición

$$\mathbb{R}^d = \bigoplus_i V_i \tag{5} \text{{homot}}$$

tal que $x|V_i$ es una homotecia, *maximal* respecto de la inclusión, *ordenada* tal que el valor propio de x en V_i es mayor que el de V_{i+1} . Esta descomposición existe porque x es autoadjunta para o .

Si v es un vector tangente a X_d en o , consideramos la descomposición asociada a $x\theta_o(v) \in \mathfrak{p}^o$ y definimos la bandera

$$\mathcal{f}(v) = \{V_1 \oplus \cdots \oplus V_i\}_i.$$

Cuando x tiene todos los valores propios distintos, entonces $\mathcal{f}(v)$ es una bandera *completa*, en general obtenemos una bandera *incompleta*. Como la descomposición (5) es o -ortogonal y ordenada, esta se recupera de la bandera $\mathcal{f}(v)$ junto con el proceso de Gram-Schmidt.

Si bien el co-dominio de \mathcal{f} depende de la entrada, tiene sentido decir que \mathcal{f} es $\mathrm{PSL}_d(\mathbb{R})$ -equivariante. En efecto, como la acción de $\mathrm{PSL}_d(\mathbb{R})$ en TX_d se lee como la acción por conjugación en $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$. Si $g \in \mathrm{PSL}_d(\mathbb{R})$ es arbitrario entonces los valores propios de x y de $\mathrm{Ad}(g)x = gxg^{-1}$ coinciden, dando así el mismo tipo de bandera \mathcal{f} . Por la misma razón, la descomposición maximal ordenada de la ecuación (5) para el vector $\mathrm{Ad}(g)x \in \mathfrak{p}^{g \cdot o}$ es $\bigoplus_i gV_i$, de donde

$$\mathcal{f}(\mathrm{Ad}(g)x) = g\mathcal{f}(x).$$

Tenemos además la siguiente propiedad de *continuidad*: Si $x_n \in \mathfrak{p}^{o_n}$ converge a $x \in \mathfrak{p}^o$, y todos los x_n son del mismo *tipo*, es decir que $\dim V_i^n$ no depende de n , entonces la bandera $\mathcal{f}(x)$ contiene a cualquier punto de acumulación de $\mathcal{f}(x_n)$ como sub-bandera. Si el valor propio de x en los límites de V_i^n es estrictamente mayor que en los límites de V_{i+1}^n , entonces $V_1^n \oplus \cdots \oplus V_i^n \rightarrow V_1(x) \oplus \cdots \oplus V_i(x)$.

Observar que, como la geodésica por v es $\gamma_v(t) = \pi^o(e^{tx})$, la forma de Maurer-Cartan $\theta_{\gamma_v(t)}(\dot{\gamma}_v(t)) = x$. Es decir, $\mathcal{f}(v)$ depende únicamente del rayo geodésico por v .

Concluimos el párrafo con la siguiente observación que resume la discusión:

Observación. Para cada $\xi \in \partial_\infty X_d$ existe una bandera (posiblemente incompleta) $\mathcal{f}(\xi)$ de \mathbb{R}^d tal que la aplicación \mathcal{f} es $\mathrm{PSL}_d(\mathbb{R})$ -equivariante.

Usando además la descripción de las K^o -órbitas en $U_o X_d$ del párrafo anterior, obtenemos una estratificación análoga de $\partial_\infty X_d$.

Obtenemos el siguiente corolario:

Corolario. Sea $G \subset \mathrm{PSL}_d(\mathbb{R})$ un subgrupo, entonces G tiene un punto fijo global en $\partial_\infty X_d$ si y solo si G preserva una bandera (posiblemente incompleta) de \mathbb{R}^d , en particular una tal acción no es irreducible en \mathbb{R}^d .

Ejemplo. Consideramos por ejemplo el caso $d = 3$. El espacio X_3 tiene dimensión 5 y el borde visual $\partial_\infty X_d$ es entonces homeomorfo a una esfera de dimensión 4. El cociente de $\partial_\infty X_d$ por la acción de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ es $\mathbb{P}(\mathfrak{a}^+)$, que es un intervalo cerrado. Las $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ -órbitas asociadas a los extremos de este intervalo son homeomorfas (respectivamente) al espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ y a la Grassmanniana $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^3)$. Para cualquier punto del interior de $\mathbb{P}(\mathfrak{a}^+)$, la órbita asociada es homeomorfa al espacio de banderas completas

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}^3) = \left\{ (\ell, V) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \times \mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^3) : \ell \subset V \right\}.$$

3.9. El borde de Furstenberg de X_d . Dsps.

3.10. El plano hiperbólico y encajes en X_3 . Recordemos que el plano hiperbólico de Poincaré suele definirse como $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ con la métrica Riemannianna

$$\langle v, w \rangle_{z \in \mathbb{H}^2} = \frac{1}{(\Im z)^2} \langle v, w \rangle_{\text{Eu}},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{Eu}}$ es el producto interno usual de \mathbb{R}^2 . El objetivo de este párrafo es explicar brevemente porqué \mathbb{H}^2 es naturalmente isométrico a X_2 .

En efecto, podemos considerar el espacio $\mathbb{Q}(\mathbb{R}^2)$ de *formas cuadráticas* de \mathbb{R}^2 . Este espacio 3-dimensional tiene una acción de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ por precomposición, para $g \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ y $q \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2)$ ponemos

$$(g \cdot q)(v) = q(g^{-1}v).$$

Si fijamos una base de \mathbb{R}^2 (la base canónica por ejemplo $\{(1, 0), (0, 1)\}$) podemos escribir $q \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2)$ como $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Definimos entonces el *discriminante* de q como

$$\Delta(q) = b^2 - 4ac.$$

Es claro que q es definida positiva (es decir, proviene de un producto interno en \mathbb{R}^2) si y solo si $\Delta(q) < 0$.

Observación. La función Δ es $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ -invariante¹.

Demostración. Verificar la cuenta a mano es bastante tedioso, conviene primero observar que $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ es generado, como grupo, por los subgrupos

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\},$$

y verificar la observación para éstos. □

Consideramos entonces la aplicación, para $q \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2)$ definida positiva,

$$\varphi : q \mapsto \frac{-b + i\sqrt{-\Delta(q)}}{2a} \in \mathbb{H}^2.$$

Observar que φ es invariante al cambiar q por tq con $t \in \mathbb{R}_+$, es decir tenemos una aplicación $\varphi : X_2 \rightarrow \mathbb{H}^2$.

Recordemos que $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ actúa en \mathbb{H}^2 por transformaciones de Möbius

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$$

y que esta acción factoriza por $\text{PSL}_2(\mathbb{R}) = \text{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm \text{id}\}$.

Observación. La aplicación $\varphi : X_2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ es un difeomorfismo $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ -equivariante.

La función $\Delta : \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ es de hecho una forma cuadrática de signatura $(1, 2)$, el proyectivizado de su cono de rectas definidas negativas X_2 , y su cono isotrópico

$$\mathcal{L} = \{q \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2) : \Delta(q) = 0\}$$

consiste en las formas degeneradas. Este cono está en biyección natural con $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, dada por $q \in \mathcal{L} \mapsto \ker q$. Su inversa tiene también una forma explícita conocida

¹En particular, la elección de otra base de \mathbb{R}^2 para definir Δ resulta en un múltiplo de Δ , este múltiplo será el determinante de la base elegida.

como la *aplicación de Veronesse* $\xi : \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{Q}(\mathbb{R}^2))$ definida como, si $\ell = \{(x, y) : ax + by = 0\}$ entonces

$$\xi(\ell) = (ax + by)^2 \in \mathbb{P}(\mathcal{L}) \subset \mathbb{P}(\mathbb{Q}(\mathbb{R}^2)).$$

Observar además que la aplicación $\varphi : \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ se extiende a $\mathbb{P}(\mathcal{L})$ con valores en $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (también de manera SL_2 -equivariante). Se tiene lo siguiente.

Observación. La aplicación de Veronesse es $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ -equivariante. La aplicación $\varphi \circ \xi : \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es la aplicación $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x/y$.

Sin embargo φ no se extiende más allá de $\mathbb{P}(\mathcal{L})$. Cuando q es tal que $\Delta(q) > 0$, es decir cuando q es de signatura $(1, 1)$, tenemos dos rectas $\ell, u \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ con $q(\ell) = q(u) = 0$. La geodésica de \mathcal{X}_2 determinada por estas dos rectas, es decir,

$$\gamma = \{o \in \mathcal{X}_2 : \ell \perp_o u\}$$

es enviada por φ en la geodésica de \mathbb{H}^2 determinada por los puntos $\varphi(\xi(\ell))$ y $\varphi(\xi(u))$ que no son otra cosa que las dos soluciones

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta(q)}}{2a}.$$

Terminamos con la siguiente consecuencia del párrafo 3.3. Para $o \in \mathcal{X}_2$ consideramos el producto interno r_o en $\mathbb{Q}(\mathbb{R}^2)$ definido como

- $r_o|_o = -\Delta|_o$,
- $r_o|_{o^{\perp\Delta}} = \Delta|_{o^{\perp\Delta}}$ y
- $o \perp_{r_o} o^{\perp\Delta}$.

Proposición 3.5. *La aplicación $\mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{X}_3$ definida como $o \mapsto r_o$ es totalmente geodésica.*

4. UN ESPACIO SIMÉTRICO DE $\text{SO}_{p,q}$

Fijamos una forma bilineal simétrica no degenerada ω de signatura (p, q) en \mathbb{R}^d , $d = p + q$ y consideramos el subgrupo de $\text{SL}_d(\mathbb{R})$ de elementos que preservan ω :

{sopq}

$$\text{SO}(\omega) = \{g \in \text{SL}_d(\mathbb{R}) : \omega(gu, gv) = \omega(u, v) \forall u, v \in \mathbb{R}^d\}. \quad (6) \quad \{\text{defi}\}$$

El Teorema de Sylvester enuncia que, en una base ω -ortonormal de \mathbb{R}^d correctamente ordenada, ω se escribe como

$$\begin{aligned} \omega(u, v) &= u_1 v_1 + \cdots + u_p v_p - (u_{p+1} v_{p+1} + \cdots + u_{p+q} v_{p+q}) \\ &= (u_1, \dots, u_{p+q}) \begin{pmatrix} \text{id}_p & 0 \\ 0 & -\text{id}_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{p+q} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se concluye entonces que, modulo conjugación por un elemento de $\text{GL}_d(\mathbb{R})$, ω esta determinada por el par (p, q) , más aún, el grupo $\text{SO}(\omega)$ se denota usualmente como $\text{SO}_{p,q}$ y se escribe entonces como

$$\text{SO}_{p,q} = \left\{ g \in \text{SL}_d(\mathbb{R}) : g^t \begin{pmatrix} \text{id}_p & 0 \\ 0 & -\text{id}_q \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} \text{id}_p & 0 \\ 0 & -\text{id}_q \end{pmatrix} \right\}, \quad (7) \quad \{\text{extr}\}$$

donde g^t denota la transpuesta de g en la base previamente elegida.

Enfatizamos que la descripción previa depende de la elección de una base ω -ortonormal, intentaremos de ahora en más dar una descripción intrínseca que minimice las elecciones hechas.

Recordamos que $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^d)$ denota el espacio de subespacios de \mathbb{R}^d de dimensión k y consideramos el espacio

$$\begin{aligned} X_{p,q} &= \{V \in \mathcal{G}_p(\mathbb{R}^d) : \omega|_V \text{ definida positiva}\} \\ &\simeq \{W \in \mathcal{G}_q(\mathbb{R}^d) : \omega|_W \text{ definida negativa}\} \quad (\text{via } V \mapsto V^\perp). \end{aligned}$$

Proposición. *La acción de $\text{SO}(\omega)$ en $X_{p,q}$ es transitiva.*

Demostración. Dsps. □

El espacio tangente a $X_{p,q}$ en $V \in X_{p,q}$ se identifica naturalmente a

$$\text{hom}(V, V^\perp) = T_V X_{p,q}.$$

Como ω es definida tanto en V como en V^\perp , obtenemos canonicamente un producto interno en $\text{hom}(V, V^\perp)$, denotado $(\cdot, \cdot)_V$ y definido como sigue: si $\{v_1, \dots, v_p\}$ es una base ω -ortonormal de V y $\{w_1, \dots, w_q\}$ es una base ω -ortonormal de V^\perp entonces decretamos que el conjunto

$$\{\varphi_{ij} : V \rightarrow V^\perp, i \in \llbracket 1, p \rrbracket, j \in \llbracket 1, q \rrbracket\}$$

definido como $\varphi_{ij}(v_i) = w_j$ y $\varphi_{ij}(v_k) = 0$ para todo $k \neq i$, es una base ortonormal de $\text{hom}(V, V^\perp)$.

Observación 4.1. Observar que $\text{hom}(V, V^\perp) = V^* \otimes V^\perp$ y que el producto interno anteriormente definido coincide con el producto interno natural de $V^* \otimes V^\perp$ si dotamos a V^\perp de $-\omega$ y a V^* del producto interno dual asociado a $\omega|_V$.

{isometria}

Observación 4.2. Mas importante remarcar es que, como los elementos de $\text{SO}(\omega)$ preservan ω , su acción en la variedad Riemanniana $(X_{p,q}, V \mapsto (\cdot, \cdot)_V)$ es por isometrías.

Definición 4.3. Un *espacio simétrico Riemanniano* asociado a $\text{SO}(\omega)$ es la variedad Riemanniana $(X_{p,q}, V \mapsto (\cdot, \cdot)_V)$.

Nos dirigimos a mostrar que efectivamente es un espacio simétrico.

4.1. Involuciones asociadas a la elección de $V \in X_{p,q}$. La elección de un punto V en el espacio simétrico de $\text{SO}(\omega)$ induce:

- una simetría axial $s_V(v + w) = v - w$ de \mathbb{R}^d según la descomposición $\mathbb{R}^d = V \oplus V^\perp$;
- un producto interno $o_V \in X_d$ definido como: $o_V(V, V^\perp) \equiv 0$; $o_V|_V = \omega|_V$; $o_V|_{V^\perp} = -\omega|_{V^\perp}$.

El producto interno o_V induce a su vez una involución adjunta $g \mapsto g^{*V}$ y el grupo $\text{SO}(\omega)$ se escribe entonces como

$$\text{SO}(\omega) = \{g \in \text{SL}_d(\mathbb{R}) : g^{*V} s_V g = s_V\},$$

esto es simplemente una reformulación de la ecuación (7). En particular, el operador adjunta $*_V$ preserva $\text{SO}(\omega)$ y obtenemos un morfismo involutivo $\tau_V : \text{SO}(\omega) \rightarrow \text{SO}(\omega)$ definido como

$$\tau_V(g) = (g^{*V})^{-1}.$$

{Xpq}

Proposición 4.4. *El espacio $(X_{p,q}, V \mapsto (\cdot, \cdot)_V)$ es un espacio globalmente simétrico.*

Para demostrar la proposición comenzamos por dar una nueva descripción del espacio tangente $T_V X_{p,q}$. Con este fin, estudiamos la derivada, en la identidad, de la aplicación *actuar en V* : $\pi_V : \text{SO}(\omega) \rightarrow X_{p,q}$ definida como $\pi_V(g) = g \cdot V$.

Consideramos entonces el álgebra de Lie

$$T_{\text{id}}\text{SO}(\omega) = \mathfrak{so}(\omega) = \{x \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) : \omega(xu, v) + \omega(u, xv) = 0\},$$

esta descripción se obtiene derivando respecto de g la ecuación que define $\text{SO}(\omega)$ (ecuación numero (6)).

La diferencial de τ_V en la identidad $\pi_V := d_{\text{id}}\tau_V : \mathfrak{so}(\omega) \rightarrow \mathfrak{so}(\omega)$ esta dada por la involución

$$\pi_V : x \mapsto -x^{*V}.$$

Consideramos entonces la descomposición de $\mathfrak{so}(\omega)$ en vectores propios de π_V :

$$\mathfrak{so}(\omega) = \mathfrak{k}^V \oplus \mathfrak{p}^V$$

donde:

\mathfrak{k}^V son los vectores fijos por π_V , o analogamente, los vectores de $\mathfrak{so}(\omega)$ anti-simétricos para el producto interno o_V :

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}^V &= \{x \in \mathfrak{so}(\omega) : d_{\text{id}}\tau_V(x) = x\} \\ &= \{x \in \mathfrak{so}(\omega) : x + x^{*V} = 0\} \\ &= \{x \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) : x + x^{*V} = 0 \text{ y } xs_V = s_Vx\}. \end{aligned}$$

Se deduce que si $x \in \mathfrak{k}^V$ entonces x preserva tanto V como V^\perp y que e^x pertenece al estabilizador de V en $\text{SO}(\omega)$. Se concluye que¹ el estabilizador de V en $\text{SO}(\omega)$ es el grupo

{estab}

$$E_V(\text{SO}(\omega))_0 = \exp(\mathfrak{k}^V) = \{k \in \text{SO}(\omega) : \tau_V(k) = k\}. \quad (8)$$

¹la componente conexa de la identidad de

Concluimos que $d_{\text{id}}\pi_V$ tiene por núcleo \mathfrak{k}^V y que por lo tanto es sobreyectiva cuando restringida a \mathfrak{p}^V , es decir, $d_{\text{id}}\pi_V : \mathfrak{p}^V \rightarrow \mathbb{T}_V X_{p,q}$ es un isomorfismo.

\mathfrak{p}^V son los elementos de $\mathfrak{so}(\omega)$ simétricos para o_V , es decir diagonalizables en un conjunto o_V -ortogonal:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}^V &= \{x \in \mathfrak{so}(\omega) : d_{\text{id}}\tau_V(x) = -x\} \\ &= \{x \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) : x = x^{*V} \text{ y } xs_V = -s_V x\}. \end{aligned}$$

Un análisis mas detallado de \mathfrak{p}^V será necesario para entender geodésicas y planos maximales de $X_{p,q}$. Por ahora alcanza para probar la Proposición 4.4.

Demostración. Comenzamos por mostrar que la involución τ_V actúa en $X_{p,q}$, es decir que la aplicación $\mathcal{J}_V : X_{p,q} \rightarrow X_{p,q}$ dada por

$$\mathcal{J}_V(g \cdot V) = \tau_V(g) \cdot V$$

está bien definida: en efecto, la ecuación (8) establece que si $k \cdot V = V$ entonces $\tau_V(k) = k$, de donde se concluye que si $g \cdot V = h \cdot V$ entonces $\tau_V(g) \cdot V = \tau_V(h) \cdot V$.

La diferencial de \mathcal{J}_V en V es $-\text{id}$. En efecto, por definición de \mathcal{J}_V se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{SO}(\omega) & \xrightarrow{\tau_V} & \text{SO}(\omega) \\ \pi_V \downarrow & & \downarrow \pi_V \\ X_{p,q} & \xrightarrow{\mathcal{J}_V} & X_{p,q} \end{array}$$

Como $d_{\text{id}}\pi_V : \mathfrak{p}^V \rightarrow \mathbb{T}_V X_{p,q}$ es un isomorfismo y que por definición, $d_{\text{id}}\tau_V : \mathfrak{p}^V \rightarrow \mathfrak{p}^V$ es $-\text{id}$, concluimos que $d_V \mathcal{J}_V = -\text{id}$.

La prueba concluye mostrando que \mathcal{J}_V es una isometría, porque, como $d_V \mathcal{J}_V = -\text{id}$, de aquí se deduce que además \mathcal{J}_V es la simetría central en V .

\mathcal{J}_V es una isometría: Para cada $g \in \text{SO}(\omega)$ denotamos $\varphi_g : X_{p,q} \rightarrow X_{p,q}$ la aplicación *multiplicar por g* , es decir,

$$\varphi_g(W) = g \cdot W.$$

La observación 4.2 establece que para todo $g \in \text{SO}(\omega)$, φ_g es una isometría. Se tiene además, como τ_V es un morfismo de grupo, la siguiente relación de conmutación:

$$\mathcal{J}_V \varphi_g = \varphi_{\tau_V(g)} \mathcal{J}_V. \quad (9) \quad \{\text{tutti}\}$$

Consideramos entonces $g \in \text{SO}(\omega)$ y dos vectores tangentes $u, v \in \mathbb{T}_V X_{p,q}$. Se tiene que

$$(u, v)_V = (d_V \varphi_g(u), d_V \varphi_g(v))_{g \cdot V}.$$

Por otro lado, para todo $v \in \mathbb{T}_V X_{p,q}$ se tiene que

$$\begin{aligned} d_{\varphi_g(V)} \mathcal{J}_V (d_V \varphi_g(v)) &= d_V \mathcal{J}_V \varphi_g(v) \\ &= d_V \varphi_{\tau_V(g)} \mathcal{J}_V(v) && \text{(por la ecuación (9))} \\ &= -d_V \varphi_{\tau_V(g)}(v) && \text{(porque } d_V \mathcal{J}_V = -\text{id)}. \end{aligned}$$

Como $\varphi_{\tau_V(g)}$ es una isometría de $X_{p,q}$ y los 'menos' se cancelan, concluimos que

$$(x, y)_V = \left(d_{\varphi_g(V)} \mathcal{J}_V(d_V \varphi_g(x)), d_{\varphi_g(V)} \mathcal{J}_V(d_V \varphi_g(y)) \right)_{\mathcal{J}_V(g \cdot V)},$$

lo que concluye la demostración. \square

Observación. Observamos que la identidad (9) se lee en $\text{SO}(\omega)$ como

$$\{\text{eqV}\} \quad \mathcal{J}_V g \mathcal{J}_V = \tau_V(g) \quad (10)$$

para todo $g \in \text{SO}(\omega)$.

{geoSO(p,q)}

4.2. Geodésicas de $X_{p,q}$. Comenzamos por dar una descripción de las geodésicas de $X_{p,q}$.

Proposición. Sean $V \in X_{p,q}$ y $x \in \mathfrak{so}(\omega)$. Entonces la curva $t \mapsto e^{tx} \cdot V$ es una geodésica si y solo si $x \in \mathfrak{p}^V$.

Este cálculo de geodésicas se deduce del párrafo 2.6 y de la siguiente observación:

Observación. Como \mathcal{J}_V es una isometría de $X_{p,q}$, tenemos una involución del grupo $\text{isom}_0(X_d)_0$ dada por,

$$\Psi_V(f) = \mathcal{J}_V \circ f \circ \mathcal{J}_V.$$

La ecuación (10) muestra que, en $\text{SO}_{p,q}$, esta involución coincide con τ^V . Consecuentemente, si notamos por \mathfrak{J} el álgebra de Lie de $\text{isom}_0(X_{p,q})$ y consideramos

$$\tilde{\mathfrak{p}}^V = \{x \in \mathfrak{J} : d_{\text{id}} \Psi_V(x) = -x\},$$

entonces $\tilde{\mathfrak{p}}^V = \mathfrak{p}^V$. En efecto, ambos tienen la dimensión de $T_V X_{p,q}$ y por la ecuación (10) tenemos $\mathfrak{p}^V \subset \tilde{\mathfrak{p}}^V$.

4.3. La aplicación $V \mapsto o_V$ es totalmente geodésica. El párrafo anterior tiene como consecuencia la siguiente proposición:

Proposición. La aplicación $X_{p,q} \rightarrow X_d$ definida como $V \mapsto o_V$ es totalmente geodésica.

Demostración. Un calculo directo muestra que es $\text{SO}(\omega)$ -equivariante, es decir que para todos $g \in \text{SO}(\omega)$ y $V \in X_{p,q}$ se tiene que

$$o_{g \cdot V} = g \cdot o_V.$$

Por definición tenemos que $\mathfrak{p}^V \subset \mathfrak{p}^{o_V}$, la equivariancia y los párrafos 4.2 y 3.3 muestran entonces que para todo $x \in \mathfrak{p}^V$, la curva $t \mapsto e^{tx} \cdot o_V$ es una geodésica de X_d . \square

4.4. Planos totalmente geodésicos maximales de $X_{p,q}$. Comenzamos por una definición:

Definición. Un subespacio $W \in \mathcal{G}_2(\mathbb{R}^d)$ es una *recta hiperbólica* si $\omega|_W$ tiene signatura (1, 1).

El objetivo de esta sección es explicar la siguiente biyección:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{subvariedades totalmente geodésicas planas maximales por } V \\ \updownarrow 1:1 \\ \text{mín}\{p, q\} \text{ rectas hiperbólicas } s_V\text{-invariantes y } \omega\text{-ortogonales} \end{array} \right\}$$

Con este fin, estudiamos con más detalle los elementos de \mathfrak{p}^V . Éstos son elementos simétricos para o_V y por lo tanto diagonalizables en un conjunto o_V -ortogonal. Sin embargo, pertenecer a $\mathfrak{so}(\omega)$ impone más restricciones. Sea $x \in \mathfrak{p}^V$ entonces:

- $x^{*V} = x$,
- $xs_V = -s_Vx$
- para todos $u, v \in \mathbb{R}^d$ se tiene que $\omega(xu, v) + \omega(u, xv) = 0$.

Sea $\ell \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ una recta propia para x de valor propio $\lambda_\ell(x) \neq 0$. El segundo ítem implica que $s_V(\ell)$ es también propia para x de valor propio $-\lambda_\ell(x)$. El tercer ítem implica además que $\omega(\ell, \ell) = 0$, concluimos entonces que

$$\ell \oplus s_V(\ell)$$

es una recta hiperbólica s_V -invariante.

Si $\eta \neq \ell$ es otra recta propia para x tal que $0 \neq \lambda_\eta(x) \neq -\lambda_\ell(x)$ entonces el tercer ítem implica que $\omega(\eta, \ell) = 0$. Se concluye entonces que las rectas hiperbólicas asociadas a η y a ℓ son ω -ortogonales:

$$\eta \oplus s_V(\eta) \perp \ell \oplus s_V(\ell).$$

Observación 4.5. Una colección maximal de rectas hiperbólicas ω -ortogonales tiene necesariamente mín $\{p, q\}$ -elementos.

Si recordamos que x es diagonalizable, la última observación y la discusión que le precede implican que x tiene, a lo más, mín $\{p, q\}$ valores propios no nulos. Concluimos entonces que x induce una descomposición ω -ortogonal

$$\mathbb{R}^d = \ker x \bigoplus_{W \in \mathcal{H}_x} W \tag{11} \quad \{\text{desco}\}$$

donde \mathcal{H}_x es una colección ω -ortogonal de rectas hiperbólicas, cada una invariante por x (y por s_V) y tal que para todo $W \in \mathcal{H}_x$ la restricción $x|_W$ es diagonalizable con valores propios no nulos.

Fijamos entonces una colección maximal \mathcal{H} de rectas hiperbólicas ω -ortogonales, cada una s_V -invariante y consideramos el subespacio $\mathfrak{a}_{\mathcal{H}} \subset \mathfrak{p}^V$ definido como

$$\mathfrak{a}_{\mathcal{H}} = \{x \in \mathfrak{p}^V : x(W) \subset W \ \forall W \in \mathcal{H}\}.$$

$\{\text{abeliana}\}$

Observación 4.6. $\mathfrak{a}_{\mathcal{H}}$ es un espacio vectorial de dimensión mín $\{p, q\}$, sus elementos se diagonalizan en un mismo conjunto o_V -ortogonal: las rectas isotrópicas de cada elemento de \mathcal{H} y el ω -ortogonal de $\bigoplus_{W \in \mathcal{H}} W$. En este último espacio vectorial ω es definida, y por lo tanto está contenido en el núcleo de todo elemento de $\mathfrak{a}_{\mathcal{H}}$. En particular los elementos de $\mathfrak{a}_{\mathcal{H}}$ conmutan entre si, más aún, $\mathfrak{a}_{\mathcal{H}}$ es maximal con esta propiedad.

$\{\text{flats}\}$

Proposición 4.7. *El conjunto $e^{\mathfrak{a}_{\mathcal{H}}} \cdot V$ es una subvariedad plana totalmente geodésica por V , maximal respecto a la inclusión.*

Demostración. En vista del párrafo 4.2, para mostrar que $e^{a_{\mathcal{H}}} \cdot V$ es totalmente geodésico, alcanza demostrar que si $x, y \in \mathfrak{p}^V$ entonces

$$x \in \mathfrak{p}^{e^y \cdot V}.$$

Los elementos de $\mathfrak{p}^{e^y \cdot V}$ son aquellos elementos de $\mathfrak{so}(\omega)$ que se diagonalizan en un conjunto $o_{e^y \cdot V}$ -ortogonal. El conjunto o_V -ortogonal de la observación 4.6 es ortogonal para $e^y \cdot o_V = o_{e^y \cdot V}$ (recordemos que la aplicación $V \mapsto o_V$ es $\text{SO}(\omega)$ -equivariante). Como x es diagonal en este conjunto concluimos que $x \in \mathfrak{p}^{e^y \cdot V}$.

Para mostrar que $e^{a_{\mathcal{H}}} \cdot V$ es además de curvatura constante = 0 observamos que, como los elementos de $e^{a_{\mathcal{H}}}$ conmutan, la aplicación $x \mapsto e^x \cdot V$ es una isometría entre

$$(\mathfrak{a}_{\mathcal{H}}, (\cdot, \cdot)_V)$$

(que es un espacio Euclideo y por lo tanto plano) y la métrica de $X_{p,q}$ restringida a $e^{a_{\mathcal{H}}} \cdot V$. Concluimos que $e^{a_{\mathcal{H}}} \cdot V$ con la métrica inducida tiene curvatura 0, como además es una subvariedad geodésica, concluimos que la curvatura de la métrica inducida y la de $X_{p,q}$ coinciden. \square

4.5. Raíces y cámaras de Weyl. Estudiamos entonces, dado $x \in \mathfrak{a}_{\mathcal{H}}$, los planos geodésicos maximales que pasan por x .

En vista de la Proposición 4.7 y la ecuación (11), los planos que pasan por x están en biyección con las colecciones \mathcal{H}_x ω -ortogonales de rectas hiperbólicas donde cada una es x -invariante (y s_V -invariante).

La existencia de otras tales colecciones, a parte de \mathcal{H} , depende de los valores propios de x . A modo de ejemplo, supongamos que existen $U, W \in \mathcal{H}$ tales que los valores propios de $x|_U$ coinciden con los valores propios de $x|_W$. Esto equivale a decir que existen rectas isotrópicas $\ell \in U$ y $\eta \in W$ tales que

$$\lambda_{\ell}(x) = \lambda_{\eta}(x).$$

Consideramos entonces el grupo compacto

$$K_{U,W} := \{k \in K^V : k|(U \oplus W)^{\perp} = \text{id}\},$$

este grupo es simplemente el producto de rotaciones en el espacio de dimension 2 $(U \oplus W) \cap V$, con rotaciones en $(U \oplus W) \cap V^{\perp}$.

Observamos entonces que para todo $k \in K_{U,W}$ la colección $k\mathcal{H}$ verifica la ecuación (11) para x y por lo tanto corresponde a un nuevo plano geodésico maximal por x .

De haber más coincidencias en valores propios, obtendríamos un grupo compacto de dimensión mas grande y por lo tanto familias de planos geodésicos maximales por x con más parámetros. En el otro extremo, si no hay ninguna coincidencia en los valores propios de x y todos aquellos que pueden no ser cero, son efectivamente no nulos, entonces \mathcal{H} es la única colección que verifica (11) para x y por lo tanto $e^{a_{\mathcal{H}}} \cdot V$ es el único plano geodésico maximal por x .

Para entender entonces las familias de planos geodésicos maximales que pasan por $x \in \mathfrak{a}_{\mathcal{H}} \subset \text{T}_V X_{p,q}$, fijamos de manera arbitraria, para cada $U \in \mathcal{H}$, una recta isotrópica $\ell \in U$ y consideramos el siguiente subconjunto de $\mathfrak{a}_{\mathcal{H}}^*$. Estamos obligados a distinguir dos casos:

- si $p \neq q$, es decir que todo $x \in \mathfrak{p}^V$ tiene núcleo no trivial, entonces éste núcleo puede usarse para crear nuevas colecciones cuando ocurre que $\lambda_{\ell_U}(x) = 0$

para algún $U \in \mathcal{H}$; consideramos entonces

$$\mathbf{B}_{\min\{p,q\}} := \{ \pm \lambda_{\ell_U} \pm \lambda_{\ell_W} : \mathfrak{a}_{\mathcal{H}} \rightarrow \mathbb{R} \}_{U,W \in \mathcal{H}} \cup \{ \lambda_{\ell_U} : \mathfrak{a}_{\mathcal{H}} \rightarrow \mathbb{R} \}_{U \in \mathcal{H}}.$$

- si $p = q$ alcanza con entender las coincidencias entre dos valores propios distintos:

$$\mathbf{D}_{\min\{p,q\}} := \{ \pm \lambda_{\ell_U} \pm \lambda_{\ell_W} : \mathfrak{a}_{\mathcal{H}} \rightarrow \mathbb{R} \}_{U \neq W \in \mathcal{H}}.$$

Definición. El conjunto $\mathbf{B}_{\min\{p,q\}}$ (resp. $\mathbf{D}_{\min\{p,q\}}$ si $p = q$) se llama *el sistema de raíces restringidas* de $\mathrm{SO}(\omega)$. Una *cámara de Weyl* es la clausura de una componente conexa del complemento de $\bigcup_{\alpha \in \mathbf{B}_{\min\{p,q\}}} \ker \alpha$, (reemplazamos \mathbf{B} por \mathbf{D} si $p = q$).

La importancia de las cámaras de Weyl reside en que un elemento $x \in \mathfrak{a}_{\mathcal{H}}$ pertenece al interior de una cámara de Weyl si y solo si existe un único plano geodésico maximal por x .

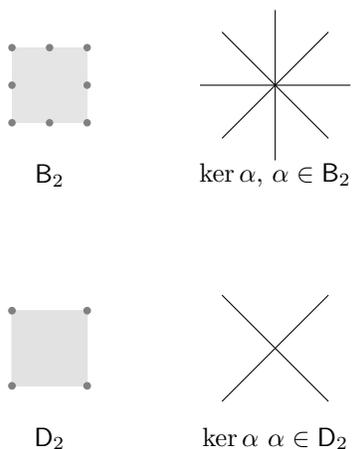


FIGURA 4. A la izquierda el sistema de raíces restringidas de $\mathrm{SO}_{2,n}$, a la derecha los respectivos núcleos.

{cptSec}

5. EL CUBRIMIENTO UNIVERSAL DE UN GRUPO COMPACTO

Lo que hay que llevarse de esta sección es el siguiente Teorema de Weyl, demostrado en el párrafo 5.8:

Teorema. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie real tal que la forma de Killing $\kappa_{\mathfrak{g}}$ es definida negativa, entonces todo grupo de Lie G de álgebra \mathfrak{g} es compacto.*

La estrategia general pasa por estudiar grupos de Lie G con una métrica Riemanniana *bi-invariante*, es decir, tal que para todo $g \in G$ las aplicaciones $L_g(h) = gh$ y $R_g(h) = hg$ son isometrías. Mostramos primero que un tal grupo es un espacio globalmente simétrico, cuyo tensor de Ricci en la identidad de G , e , será $\text{Ricci}_e = -(1/4)\kappa_{\mathfrak{g}}$. Si admitimos el conocido Teorema de Bonnet-Myers¹ la prueba del teorema de Weyl se termina con ese cálculo, sin embargo, seguimos la estrategia del libro de Helgason [4] y remplazamos el uso de este teorema por un argumento mas elemental (ver el párrafo 5.6).

{bi-ad}

5.1. Descripción en \mathfrak{g} de métricas bi-invariantes. El objetivo es entonces explicar la siguiente biyección que nos permitirá aplicar lo estudiado a cubrimientos de G ,

$$\begin{array}{c} \{\text{métricas Riemannianas bi-invariantes en } G \text{ (conexo)}\} \\ \updownarrow_{1:1} \\ \{\text{productos internos } \mathfrak{ad}_{\mathfrak{g}}\text{-asociativos en } \mathfrak{g}\}. \end{array}$$

En efecto, si $(,)$ es una métrica Riemanniana bi-invariante en G , entonces $(,)_e$ es un producto interno en \mathfrak{g} $\text{Ad}(G)$ -invariante, es decir tal que para todos $x, y \in \mathfrak{g}$ y $g \in G$ vale que

$$(\text{Ad}(g)x, \text{Ad}(g)y)_e = (x, y)_e.$$

Si $(g_t)_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ es una curva en G con $g_0 = e$ y $\dot{g}_0 = z \in \mathfrak{g}$ obtenemos al derivar la ecuación respecto de t (ver A.1) que

$$(\text{ad}(z)x, y)_e + (x, \text{ad}(z)y)_e = 0,$$

es decir que para todos $x, y, z \in \mathfrak{g}$ vale que

$$([x, y], z)_e = (x, [y, z])_e.$$

Recíprocamente, sea ω un producto interno en \mathfrak{g} tal que $\omega([x, y], z) = \omega(x, [y, z])$ para todos $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Para $g \in G$ definimos el producto interno en $\mathbb{T}_g G$ como, para $x, y \in \mathfrak{g}$,

$$(d_e L_g(x), d_e L_g(y))_g := \omega(x, y).$$

Por definición, las aplicaciones L_h son isometrías. Mostramos primero que para todos $x, y, \in \mathfrak{g}$ la aplicación

$$g \mapsto \omega(\text{Ad}(g)x, \text{Ad}(g)y)$$

es constante. Con este fin, consideramos $z \in \mathfrak{g}$ y la curva $(ge^{tz})_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ con $g_0 = g$ y $\dot{g}_0 = d_e L_g(z)$. La curva

$$t \mapsto \omega(\text{Ad}(g_t)x, \text{Ad}(g_t)y)$$

¹Una variedad Riemanniana M completa tal que para todos $p \in M$ y $v \in \mathbb{T}_p M$ unitario vale $\text{Ricci}_p(v, v) \geq \varepsilon$ (para ε independiente de p) es compacta. Ver por ejemplo do Carmo [2, IX.3].

tiene derivada, como $\text{Ad}(ge^{tz}) = \text{Ad}(g)\text{Ad}(e^{tz})$ y $d_{\text{id}}\text{Ad} = \text{ad}$ (ver [A.1](#)),

$$\omega\left(\text{Ad}(g)([z, x]), \text{Ad}(g)(y)\right) + \omega\left(\text{Ad}(g)(x), \text{Ad}(g)([z, y])\right) = 0,$$

porque $\text{Ad}(g)[x, y] = [\text{Ad}(g)x, \text{Ad}(g)y]$. Como G es conexo, se concluye que $g \mapsto \omega(\text{Ad}(g)x, \text{Ad}(g)y)$ es constante, como buscado.

Tenemos entonces que para todo $g \in G$ la aplicación $d_g R_{g^{-1}} : T_g G \rightarrow T_e G$ es una isometría. Para terminar tenemos que probar que para todo h , la aplicación $R_h : G \rightarrow G$ es una isometría pero fijando $g \in G$ vemos que

$$d_g R_h = d_g L_{g^{-1}} \circ d_e R_h \circ d_h L_g$$

es una composición de isometrías, lo que termina la prueba. \square

{bi-invSim}

5.2. Simetría global.

Proposición. *Un grupo de Lie con una métrica bi-invariante es un espacio globalmente simétrico.*

Demostración. Sea G un tal grupo, demostramos que la aplicación $\mathcal{J}_e : G \rightarrow G$ definida como

$$\mathcal{J}_e(x) = x^{-1}$$

es una isometría; como $d_e \mathcal{J}_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ es $-\text{id}$ se deduce que \mathcal{J}_e es la simetría central en e y habremos concluido. La simetría central basada en $g \in G$ se obtendrá como

$$\mathcal{J}_g(x) = gx^{-1}g = L_g \circ \mathcal{J}_e \circ (L_g)^{-1}(x) = R_g \circ \mathcal{J}_e \circ (R_g)^{-1}(x).$$

Para ver que \mathcal{J}_e es una isometría global vemos que para todo $g \in G$ se tiene que $\mathcal{J}_e L_g = R_{g^{-1}} \mathcal{J}_e$, de donde

$$d_g \mathcal{J}_e \circ d_e L_g = d_e R_{g^{-1}} (d_e \mathcal{J}_e) = -d_e R_{g^{-1}}.$$

Como para las aplicaciones L_g y $R_{g^{-1}}$ son isometrías, concluimos lo deseado. \square

{maurerG}

5.3. El espacio \mathfrak{p}^e y la forma de Maurer-Cartan. Tenemos entonces una descomposición

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{k}_{\mathfrak{J}}^e \oplus \mathfrak{p}_{\mathfrak{J}}^e,$$

del álgebra de Lie \mathfrak{J} de $\text{isom}_{\text{id}}(G)$, donde $\mathfrak{p}_{\mathfrak{J}}^e$ es el espacio anti-fijo por la diferencial en id de

$$f \mapsto \mathcal{J}_e f \mathcal{J}_e. \quad (12) \quad \{\text{invo}\}$$

Observamos que el grupo $G \times G$ actúa por isometrías de G como¹ $\varphi_{(g,h)}(\gamma) = g\gamma h^{-1}$ y por lo tanto $G_e \times G_e \subset \text{isom}_0(G)$. La involución (12) restringida a $G_e \times G_e$ es

$$\tau_e : (g, h) \mapsto (h, g);$$

en efecto, para todos $g, h, x \in G$ se tiene $\mathcal{J}_e\left(\varphi_{(g,h)}(\mathcal{J}_e(\gamma))\right) = h\gamma g^{-1} = \varphi_{(h,g)}(\gamma)$.

Los espacios propios de la diferencial $d_{(e,e)}\tau_e : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ son

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}^e &= \{(x, x) : x \in \mathfrak{g}\}, \\ \mathfrak{p}^e &= \{(x, -x) : x \in \mathfrak{g}\}. \end{aligned}$$

Observación. Se tiene que $\mathfrak{p}_{\mathfrak{J}}^e = \mathfrak{p}^e$.

¹el inverso en h es necesario para que esto defina una acción de $G \times G$.

Demostración. En efecto, se deduce de que $\mathfrak{p}^e \subset \mathfrak{p}_J^e$ (porque son los puntos anti-fijos de la involución (12) restringidos al subespacio $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \subset \mathfrak{J}$) y de que tienen la misma dimensión (igual a $\mathbb{T}_e G = \mathfrak{g}$). \square

Más aún, la aplicación $\pi_e : \text{isom}_0(G) \rightarrow G$ definida como $\pi_e(f) = f(e)$ se restringe a $G \times G$ como

$$\pi_e(\varphi_{g,h}) = \varphi_{(g,h)}(e) = gh^{-1}.$$

La diferencial $\pi_e : \mathfrak{p}^e \rightarrow \mathbb{T}_e G = \mathfrak{g}$ es $\pi_e(x, -x) = 2x$, de donde su inversa, la forma de Maurer-Cartan, $\theta_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{p}^e$ es

$$\theta_e(x) = (x/2, -x/2).$$

Observación. Este pequeño trabajo hay que hacerlo porque los grupos $\text{isom}_0(G)$ y $G \times G$ no coinciden necesariamente (e.g. $G = \mathbb{R}^n$).

{geoG}

5.4. Geodésicas de G .

Proposición. Las geodésicas por $e \in G$ son los subgrupos a un parámetro de G .

Demostración. Como G es un espacio globalmente simétrico, del párrafo 2.6 tenemos que las geodésicas de G son de la forma $t \mapsto \pi_e(e^{tx})$ para $x \in \mathfrak{p}_J^e$. Como consecuencia del párrafo anterior tenemos que $\mathfrak{p}^e = \mathfrak{p}_J^e$ y por lo tanto la geodésica por e con velocidad $x \in \mathfrak{g}$ es $t \mapsto \pi_e(e^{t(x/2, -x/2)}) = e^{tx}$. \square

Corolario. Si G es conexo y admite una métrica bi-invariante entonces el mapa exponencial es sobreyectivo.

Corresponde comparar con, por ejemplo, el grupo $\text{SL}(2, \mathbb{R})$, donde la matriz $\begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & -1/t \end{pmatrix}$ con $t > 1$ no es alcanzada por $\exp \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ (de donde se concluye que $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ no admite métricas bi-invariantes).

{bicpt}

5.5. Un grupo compacto admite una métrica bi-invariante.

Observación. Un grupo de Lie compacto admite una medida finita invariante a derecha.

Demostración. Sea Ω_e una forma de volumen en $\mathbb{T}_e K = \mathfrak{k}$ (es decir una dim \mathfrak{k} -forma alternada no degenerada). Definiendo, para $k \in K$, la forma Ω_k como el pull-back $R_k^* \Omega_e$ obtenemos una dim \mathfrak{k} -forma en K , no degenerada, invariante por multiplicación a derecha.

Nada garantiza que R_k preserve orientación cuando saltamos de una componente conexa a otra, sin embargo, si K_c es una componente conexa de K entonces:

- $\int_{K_c} \Omega_k \notin \{0, \infty\}$,
- para todo abierto \mathcal{A} de K_c , el signo de la integral $\int_{\mathcal{A}} \Omega_k$ solo depende de K_c .

Definimos entonces la medida en cada componente conexa de K como $\mu(\mathcal{A}) = \pm \int_{\mathcal{A}} \Omega_k$ eligiendo el signo para que $\mu(\mathcal{A}) > 0$ y extendemos esta medida a K de manera obvia. Como K es compacto, tiene un número finito de componentes conexas de donde $\mu(K) < \infty$. \square

De la existencia de esta medida se deduce inmediatamente lo siguiente:

Observación. Si K es un grupo de Lie compacto y $\rho : K \rightarrow \text{GL}(V, \mathbb{R})$ es una representación, entonces existe en V un producto interno $\rho(K)$ -invariante. Considerando la representación $\text{Ad} : K \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{k})$ obtenemos que K admite una métrica bi-invariante.

Demostración. Fijamos un producto interno (arbitrario) ω en V y lo promediamos usando la medida μ de la observación para obtener que el producto interno

$$(u, v) \mapsto \int_K \omega(\rho(k)u, \rho(k)v) d\mu(k) < \infty$$

es $\rho(K)$ -invariante porque μ es invariante a derecha. \square

Usando el párrafo anterior tenemos entonces que un grupo compacto es un espacio globalmente simétrico, cuyas geodésicas por e son los grupos a un parámetro. Por completitud de la métrica concluimos que el mapa exponencial de un tal grupo es sobreyectivo.

{cpt}

5.6. Grupos compactos de centro finito. Podemos ahora mostrar el siguiente teorema, el argumento es de Helgason [4, Ch. II, Thm. 6.9].

Teorema. *El cubrimiento universal de un grupo de Lie compacto de centro finito es compacto.*

En particular, el grupo fundamental de un tal grupo es finito.

Demostración. Sean K un tal grupo y \mathbb{K} su cubrimiento universal. Es un grupo de Lie (ver A.9) de álgebra de Lie \mathfrak{k} . El grupo K , al ser compacto, tiene una métrica bi-invariante, y del párrafo 5.1 se deduce que \mathbb{K} también. Esta métrica lo convierte en un espacio globalmente simétrico. En particular es un espacio completo y las geodésicas de \mathbb{K} por e (la identidad de \mathbb{K}) son los subgrupos a un parámetro de \mathbb{K} .

La proyección cociente $\pi : \mathbb{K} \rightarrow K$ es un morfismo de grupos cuyo núcleo, Γ , es un subgrupo discreto de $Z(\mathbb{K})$, ver A.9. Como el centro de K es finito, $Z(\mathfrak{k}) = \{0\}$ y por lo tanto $Z(\mathbb{K})$ es un subgrupo discreto de \mathbb{K} .

Supongamos que \mathbb{K} no es compacto. Por completitud existe un rayo geodésico minimizante, es decir, $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ geodésica minimizante para todo tiempo futuro, con $\alpha(0) = e$. La contradicción vendrá mostrando que $\alpha(t) \in Z(\mathbb{K})$ para todo t .

Observamos primero que, como las geodésicas de \mathbb{K} por e son los grupos a un parámetro, es el caso de α y entonces:

- multiplicando por los elementos de α vemos que esta es globalmente minimizante, es decir que minimiza la distancia entre cualquier par de sus puntos;
- la proyección $\pi(\alpha)$ es un subgrupo a un parámetro de K .

Como K es compacto, la clausura de $\pi(\alpha)$ es un subgrupo abeliano de K . Se concluye entonces que $\pi(\alpha)$ acumula en e .

Consideramos una sucesión $t_n \rightarrow \infty$ tal que

$$\pi(\alpha(t_n)) \rightarrow e.$$

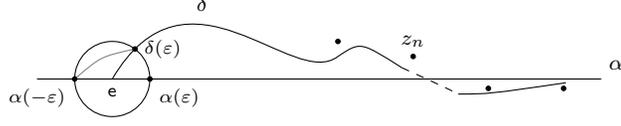
Esta convergencia se interpreta en \mathbb{K} como sigue: existe una sucesión $z_n \in \Gamma = \pi^{-1}(e)$ tal que $d_{\mathbb{K}}(z_n, \alpha(t_n)) \rightarrow 0$.

Consideramos $g \in \mathbb{K}$ arbitrario, el objetivo es mostrar que la geodésica globalmente minimizante $\delta(t) = g\alpha(t)g^{-1}$ coincide con α . De no ser así, el ángulo entre α y δ en e es diferente de 0, en particular, existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$d_{\mathbb{K}}(\alpha(-\varepsilon), \delta(\varepsilon)) < 2\varepsilon = d(\alpha(-\varepsilon), \alpha(\varepsilon)).$$

Observamos además que

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{K}}(\delta(t_n), \alpha(t_n)) &\leq d_{\mathbb{K}}(g\alpha(t_n)g^{-1}, z_n) + d_{\mathbb{K}}(z_n, \alpha(t_n)) \\ &= 2d_{\mathbb{K}}(z_n, \alpha(t_n)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$



porque $z_n \in Z(\mathbb{K})$ y $d_{\mathbb{K}}$ es bi-invariante. Consideramos entonces la geodésica a trozos γ_n entre $\alpha(-\varepsilon)$ y $\alpha(t_n)$ definida como:

- una geodésica minimizante entre $\alpha(-\varepsilon)$ y $\delta(\varepsilon)$,
- δ entre $\delta(\varepsilon)$ y $\delta(t_n)$;
- una geodésica minimizante entre $\delta(t_n)$ y $\alpha(t_n)$.

Se concluye observando que, si n es suficientemente grande para que

$$d_{\mathbb{K}}(\alpha(-\varepsilon), \delta(\varepsilon)) + d_{\mathbb{K}}(\delta(t_n), \alpha(t_n)) < 2\varepsilon,$$

entonces γ_n es una curva entre $\alpha(-\varepsilon)$ y $\alpha(t_n)$ mas corta que α , lo que contradice que α sea minimizante. \square

{RicciG}

5.7. La curvatura de G . Consideramos nuevamente un grupo de Lie conexo G con una métrica bi-invariante. Usando el cálculo de la forma de Maurer-Cartan del párrafo 5.3 obtenemos que el tensor de curvatura se lee en este caso como sigue:

Proposición. *El tensor de curvatura de G en e es, para $x, y, z \in \mathfrak{g}$, $R(x, y)z = -\frac{1}{4} [[x, y], z]$. La curvatura seccional es*

$$\mathbb{k}(\mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y) = \frac{1}{4} \frac{([x, y], [x, y])_e}{(x, x)_e (y, y)_e - (x, y)_e^2},$$

en particular $\mathbb{k}(\mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y) \geq 0$ y es igual a 0 si y solo si $[x, y] = 0$. Se tiene además que el tensor de Ricci

$$\text{Ricci}_e = \frac{-1}{4} \kappa_{\mathfrak{g}},$$

donde $\kappa_{\mathfrak{g}}$ es la forma de Killing de \mathfrak{g} .

Demostración. Del párrafo 2.7 tenemos que, para $x, y, z \in T_e G = \mathfrak{g}$ que

$$R(x, y)z = -\pi^e \left([[\theta^e(x), \theta^e(y)], \theta^e(z)] \right).$$

Se tiene que $\pi^e(x, -x) = 2x$ y que la forma de Maurer-Cartan es $\theta_e(x) = (x/2, -x/2)$. Remplazando concluimos que

$$R(x, y)z = -\frac{1}{4} [[x, y], z].$$

Calculamos entonces

$$\begin{aligned} -(R(x, y)x, y)_e &= \frac{1}{4} \left([[x, y], x], y \right)_e \\ &= \frac{1}{4} ([x, y], [x, y])_e \quad (\text{porque } (\cdot, \cdot)_e \text{ est } \text{ad}_{\mathfrak{g}}\text{-asociativo}), \end{aligned}$$

lo que implica el cálculo de $\mathbb{k}(\mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y)$. Como $(\cdot, \cdot)_e$ es un producto interno, deducimos que $\mathbb{k}(\mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y) \geq 0$ e igual a 0 si y solo si $[x, y] = 0$.

Finalmente, aplicando la definición del tensor de Ricci tenemos, para $x, y \in T_e G$,

$$\begin{aligned} \text{Ricci}_e(x, y) &= \text{traza} (z \mapsto R(z, x)y) \\ &= \frac{-1}{4} \text{traza} (z \mapsto [[z, x], y]) \\ &= \frac{-1}{4} \kappa_{\mathfrak{g}}(y, x) && \text{(definición de } \kappa_{\mathfrak{g}}, \text{ ver A.13)} \\ &= \frac{-1}{4} \kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) && \text{(simetría de } \kappa_{\mathfrak{g}}), \end{aligned}$$

lo que termina la prueba. \square

Obtenemos el siguiente corolario.

Corolario. *El centro de \mathfrak{g} coincide con el radical del tensor Ricci_e . Sea $\mathfrak{k} = Z(\mathfrak{g})^{\perp(\cdot)_e}$, entonces \mathfrak{k} es un ideal de \mathfrak{g} y la forma de Killing de \mathfrak{k} , es definida negativa.*

Demostración. Usamos que el tensor de Ricci se recupera de las curvaturas seccionales y la Proposición de este párrafo:

$$\text{Ricci}_e(x, x) = \sum_i \mathbb{k}(\mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}z_i) = \sum_i ([x, z_i], [x, z_i])_e \geq 0 \quad (13) \quad \{\mathbf{RZi}\}$$

para cualquier base $(\cdot)_e$ -ortonormal $\{z_i\}$ de \mathfrak{g} que contenga a x .

Como las curvaturas seccionales son ≥ 0 , la ecuación (13) muestra que si $x \in \mathfrak{g}$ es tal que $\text{Ricci}_e(x, x) = 0$ entonces cada término en la suma se anula, de donde x conmuta con todos los elementos de una base de \mathfrak{g} , es decir $x \in Z(\mathfrak{g})$. La otra inclusión se deduce también de esta ecuación. Finalmente observamos que, como Ricci_e es semidefinida, su radical

$$\text{Rad Ricci}_e = \{x : \text{Ricci}_e(x, y) = 0 \forall y \in \mathfrak{g}\}$$

coincide con sus vectores isotrópicos $\{x : \text{Ricci}_e(x, x) = 0\}$.

Como $(\cdot)_e$ es un producto interno, el ortogonal \mathfrak{k} de $Z(\mathfrak{g})$ intersecta a éste solo en $\{0\}$. En particular, $\mathfrak{k} \cap \text{Rad Ricci}_e = \{0\}$ de donde $\text{Ricci}_e|_{\mathfrak{k}}$ es definida positiva.

Por otro lado, para todos $x, y \in \mathfrak{g}$ y $z \in Z(\mathfrak{g})$ se tiene

$$\begin{aligned} ([x, y], z)_e &= (x, [y, z])_e && \text{(ad}_{\mathfrak{g}}\text{-asociatividad)} \\ &= 0 && (z \in Z(\mathfrak{g})), \end{aligned}$$

es decir que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset Z(\mathfrak{g})^{\perp(\cdot)_e} = \mathfrak{k}$, en particular \mathfrak{k} es un ideal de \mathfrak{g} . Por lo tanto (ver A.13) $\kappa_{\mathfrak{k}} = \kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{k}} = -4\text{Ricci}_e|_{\mathfrak{k}}$ es definida negativa. \square

{compactoySS}

5.8. Un Teorema de Weyl. Comenzamos por enunciar algunas propiedades generales de la forma de Killing que precisaremos (y que se encuentran en el apéndice).

Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie de forma de Killing $\kappa_{\mathfrak{g}}$ entonces:

- $Z(\mathfrak{g}) \subset \text{Rad } \kappa_{\mathfrak{g}}$: en efecto si x es tal que $[x, y] = 0$ para todo $y \in \mathfrak{g}$ entonces $\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = \text{traza} (z \mapsto [x, [y, z]]) = \text{traza}(z \mapsto 0) = 0$, ver también A.13.
- Si G es un grupo de Lie de álgebra \mathfrak{g} y $\kappa_{\mathfrak{g}}$ es no degenerada (i.e. G es semi-simple), entonces $\text{Ad}(G)$ es un subgrupo cerrado de $\text{GL}(\mathfrak{g})$. Este hecho es no trivial y está demostrado en A.6.

Teorema (Weyl). *Sea K un grupo de Lie tal que $\kappa_{\mathfrak{k}}$ es definida, entonces K es compacto.*

Demostración. Como $\kappa_{\mathfrak{k}}$ es definida, \mathfrak{k} no tiene centro, de donde $Z(K)$ es discreto. En particular, $\text{Ad} : K \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{k})$ es un cubrimiento sobre su imagen, $\text{Ad}(K)$. Como $\kappa_{\mathfrak{k}}$ no degenera, $\text{Ad}(K)$ es un subgrupo cerrado de $\text{GL}(\mathfrak{k})$, contenido en $\text{SO}(\kappa_{\mathfrak{k}})$. Este último grupo es compacto por ser $\kappa_{\mathfrak{k}}$ definida. Concluimos que $\text{Ad}(K)$ es un grupo compacto, más aún, como $\kappa_{\mathfrak{k}}$ no degenera, $\kappa_{\text{ad}(\mathfrak{k})}$ tampoco, de donde $Z(\text{ad}(\mathfrak{k})) = \{0\}$, se obtiene así que el grupo $\text{Ad}(K)$ es de centro discreto. El párrafo 5.6 implica entonces que su cubrimiento universal K es compacto. Como K cubre $\text{Ad}(K)$ tenemos que el cubrimiento universal de K es también K , lo que implica la compacidad de K . \square

5.9. Clasificación de grupos con métricas bi-invariantes. En este párrafo mostramos el resultado siguiente:

Teorema. *Sea G un grupo de Lie conexo con una métrica bi-invariante, entonces el cubrimiento universal de G es isomorfo al producto $\mathbb{R}^d \times K$ donde K es un grupo compacto (simplemente conexo) de centro finito.*

Necesitamos el siguiente hecho general: si G es un grupo de Lie simplemente conexo y $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un morfismo de álgebras, entonces $\phi = d_{\text{id}}\varphi$, donde $\varphi : G \rightarrow H$ es un morfismo de grupos.

Demostración. Consideramos entonces un grupo de Lie G con una métrica bi-invariante. Del Corolario del párrafo 5.7 obtenemos una descomposición

$$\{\text{ideales}\} \quad \mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{k} \quad (14)$$

en suma de dos ideales tales que $\kappa_{\mathfrak{k}}$ es definida negativa. Sea entonces K un grupo simplemente conexo de álgebra de Lie \mathfrak{k} , por el Teorema de Weyl K es compacto (y de centro finito). Consideramos finalmente $d = \dim Z(\mathfrak{g})$, el grupo $\mathbb{R}^d \times K$ es simplemente conexo y como la descomposición (14) es por ideales, el mapa $Z(\mathfrak{g}) \times \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{g}$ dado por $(x, y) \mapsto x + y$ es un morfismo de álgebras, que integra entonces como un morfismo de grupos $\pi : \mathbb{R}^d \times K \rightarrow G$. Como ambos grupos tienen la misma álgebra de Lie este morfismo es un cubrimiento. Esto termina la prueba. \square

5.10. Los grupos de Lie compactos clásicos simplemente conexos.

5.10.1. $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$. Consideramos el producto interno usual $(,)$ en \mathbb{R}^n y el grupo $O(n)$ de matrices que lo preservan, $O_n(\mathbb{R}) = \{g \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) : g^*g = 1\}$ cuya álgebra de Lie es

$$\mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) = \{x \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) : x^* = -x\},$$

donde $*$ denota la operación adjunta de $(,)$. A modo de ejemplo, observar que el mapa

$$\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix} \mapsto (x, y, z)$$

es un isomorfismo de álgebras de Lie entre $\mathfrak{so}(3)$ y (\mathbb{R}^3, \wedge) , donde el producto \wedge es definido como $u \wedge v$ es: ortogonal a u y a v ; el conjunto $\{u, v, u \wedge v\}$ tiene la orientación de \mathbb{R}^3 ; la norma de $u \wedge v$ es el área del paralelogramo determinado por u y v .

Un elemento de $O_n(\mathbb{R})$ tiene determinante $\in \{\pm 1\}$, notamos por $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ aquellos de determinante 1 y por O_n^- aquellos con determinante -1 ; son las componentes conexas de $O_n(\mathbb{R})$.

Observamos que $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ actúa transitivamente en la esfera¹ $\mathbb{S}^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1\}$ y que el estabilizador de un punto dado $p \in \mathbb{S}^{n-1}$ es

$$E_p(\text{SO}_n(\mathbb{R})) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} : g \in \text{SO}_{n-1}(\mathbb{R}) \right\},$$

donde la matriz es tomada en la descomposición $\mathbb{R}p \oplus p^\perp$. Esto suele denotarse como $\mathbb{S}^{n-1} = \text{SO}_n(\mathbb{R})/\text{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$.

Observación 5.1. Consideramos la simetría axial respecto de p , $\mathcal{J}_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{J}_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\text{id} \end{pmatrix}.$$

Es claro que \mathcal{J}_p preserva \mathbb{S}^{n-1} , que preserva su métrica y que $d_p \mathcal{J}_p = \mathcal{J}_p|_{p^\perp} = -\text{id}$. Concluimos que \mathbb{S}^n es un espacio globalmente simétrico.

Es interesante observar que los puntos fijos de la involución $\tau^p : \text{SO}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{SO}_n(\mathbb{R})$, $\tau^p(g) = \mathcal{J}_p g \mathcal{J}_p$ es el grupo disconexo

$$\text{Fix}(\tau^p) = E_p \cup \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} : g \in \text{O}_{n-1}^-(\mathbb{R}) \right\}.$$

El cociente $\text{SO}_n(\mathbb{R})/\text{Fix}(\tau^p) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ es también un espacio globalmente simétrico.

Como \mathbb{S}^n es simplemente conexo para todo $n \geq 2$, obtenemos la siguiente consecuencia.

Lema. *El grupo fundamental de $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ es un cociente del grupo fundamental de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$.*

Demostración. Es un hecho general: si H es un subgrupo cerrado de G y G/H es simplemente conexo entonces $\pi_1(G)$ es un cociente de $\pi_1(H)$, ver **A.18**. \square

Podríamos haber continuado la inducción hasta $\text{SO}_2(\mathbb{R})$, pero esto sería una pérdida de información. De hecho $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ es difeomorfo al espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$, su grupo fundamental es por lo tanto isomorfo al grupo multiplicativo $\{1, -1\}$.

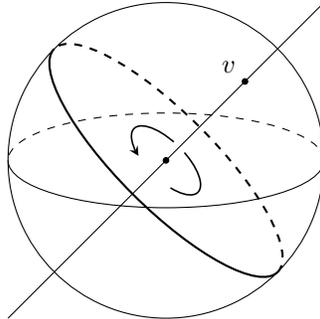


FIGURA 5. Asociamos a $v \in \mathbb{B}(0, 1]$ la rotación de eje $\mathbb{R}v$, ángulo $\pi\|v\|$ y dirección como indica la figura.

{S03}

En efecto, el espacio $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ puede interpretarse como la bola cerrada $\mathbb{B}(0, 1]$ de \mathbb{R}^3 , donde identificamos puntos antipodales de la esfera borde. Dado entonces $v \in \mathbb{B}(0, 1]$ consideramos la rotación R_v , de eje $\mathbb{R}v$, de ángulo $\pi\|v\|$ en el sentido

¹dados $p, q \in \mathbb{S}^{n-1}$ alcanza con considerar la rotación correspondiente en plano generado por p y q , y tomar la identidad en $(\mathbb{R}p \oplus \mathbb{R}q)^\perp$.

tal que para todo $w \in v^\perp$ el conjunto $\{v, w, R_v(w)\}$ tiene la orientación de \mathbb{R}^3 , ver figura 5. Es claro que todo elemento de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ se obtiene de esta manera y que esta aplicación es inyectiva.

Los grupos $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$. Nos proponemos ahora construir explícitamente un cubrimiento doble de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

5.10.2. \mathfrak{su}_n . Consideramos el producto Hermitiano usual de \mathbb{C}^n : $h(z, w) = \sum z_i \bar{w}_i$ y el grupo de transformaciones de \mathbb{C}^n que lo preserva

$$\mathrm{U}_n = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : g^*g = 1\},$$

donde $*$ es transponer y conjugar coordenada a coordenada (la operación adjunta de h), de álgebra de Lie $\mathfrak{su}_n = \{x \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : x^* = -x\}$. El determinante de los elementos de U_n tiene necesariamente módulo 1 y escribimos SU_n al subgrupo normal de aquellos con determinante = 1. En general si $\lambda \in \mathbb{S}^1$ notamos por U_n^λ al conjunto cerrado de aquellos elementos de determinante igual a λ .

La acción de SU_n en la esfera de dimension impar \mathbb{S}^{2n-1} es también transitiva y el estabilizador de un punto es isomorfo a SU_{n-1} . Obtenemos entonces que $\mathbb{S}^{2n-1} = \mathrm{SU}_n/\mathrm{SU}_{n-1}$, de donde el grupo fundamental de SU_n se obtiene, al igual que en la sección anterior (ver A.18), como un cociente de $\pi_1(\mathrm{SU}_2)$. Observamos entonces que

$$\mathrm{SU}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

es difeomorfo a la esfera \mathbb{S}^3 . Concluimos que

- SU_2 es el cubrimiento universal de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ (ver la sección siguiente para mas precisiones),
- SU_n es simplemente conexo para todo $n \geq 2$.

Cabe remarcar que \mathbb{S}^{2n-1} no es un espacio simétrico de SU_n . Hay razones teóricas para esto (como por ejemplo el párrafo ??). Podemos observar que al imitar la estrategia del caso $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, es decir, considerando la simetría central \mathcal{S}_p , para $p \in \mathbb{S}^{2n-1}$, que fija p y actúa como -1 en p^\perp , los puntos fijos en SU_n de la involución asociada a ésta es el grupo conexo

$$\mathrm{Fix} \tau^p = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{S}^1, g \in \mathrm{U}_n^\lambda \right\},$$

en la descomposición $\mathbb{C}p \oplus p^\perp = \mathbb{C}^n$. Esto muestra que el cociente $\mathrm{SU}_n/\mathrm{Fix} \tau^p = \mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ sí es un espacio simétrico asociado a SU_n . Es de curvatura variable y todas sus geodésicas son cerradas.

Recordemos que la parte real $o = \Re h$ es un producto interno en \mathbb{C}^n y que su parte imaginaria $\omega = \Im h$ es una 2-forma real alternada, no degenerada, en \mathbb{C}^n . La aplicación $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ definida como

$$\varphi(g) = \begin{pmatrix} \Re g & -\Im g \\ \Im g & \Re g \end{pmatrix}$$

verifica:

- es un morfismo de grupos,
- $\varphi(g^{*h}) = \varphi(g)^{*o}$,
- $\mathrm{traza}(\varphi(g)) = 2\Re \mathrm{traza}(g)$,
- $\det(\varphi(g)) = |\det(g)|^2$.

Como los elementos de U_n preservan simultáneamente o y ω , concluimos que

$$\varphi(U_n) = \mathrm{SO}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}),$$

donde $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ es el *grupo simpléctico real* de matrices de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ que preservan la forma ω .

5.10.3. \mathfrak{sp}_n . Consideramos los *cuaterniones de Hamilton* \mathbb{H} . Por definición, \mathbb{H} es el álgebra real generada por $\{1, i, j, ij\}$ donde

$$i^2 = -1, \quad j^2 = -1 \quad \text{y} \quad ij = -ji.$$

Es un espacio vectorial real de dimensión 4. El *conjugado* de $q = a + bi + cj + dij$ es $\bar{q} = a - bi - cj - dij$, el *módulo* de q es

$$|q| = q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

es el cuadrado de la norma de q para el producto interno de \mathbb{R}^4 que hace del conjunto $\{1, i, j, ij\}$ una base ortonormal. Si $q \in \mathbb{H}$ es no nulo, entonces tiene un inverso bien definido $q^{-1} = \bar{q}/|q|$. Registramos estas (y otras) observaciones directas en la siguiente observación:

Observación. El álgebra \mathbb{H} es asociativa, con división y su centro es $\mathbb{R}1$.

Una cuenta directa da que el módulo es multiplicativo $|qt| = |q||t|$. Así, el conjunto de los cuaterniones de módulo 1 es un grupo multiplicativo que denotamos

$$\mathrm{Sp}(1) = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\},$$

es difeomorfo a la esfera \mathbb{S}^3 .

Denotamos por $\mathfrak{p}\mathbb{H}$ el conjunto de *cuaterniones puros*

$$\mathfrak{p}\mathbb{H} := i\mathbb{R} \oplus j\mathbb{R} \oplus ij\mathbb{R} = (\mathbb{R}1)^\perp.$$

Multiplicar por un elemento de $\mathrm{Sp}(1)$ preserva el módulo en \mathbb{H} y es por lo tanto una isometría de \mathbb{H} . Si $q \in \mathrm{Sp}(1)$ entonces conjugar por q ,

$$x \mapsto qxq^{-1},$$

preserva $\mathbb{R} \cdot 1$ y por lo tanto su ortogonal $\mathfrak{p}\mathbb{H}$. Obtenemos un mapa de $\mathrm{Sp}(1) \rightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ definido como

$$q \mapsto \left(x \mapsto qxq^{-1} \right) \quad x \in \mathfrak{p}\mathbb{H}$$

cuyo núcleo es $\{1, -1\}$. Obtenemos entonces que el cubrimiento universal de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ es $\mathrm{Sp}(1)$.

En realidad, si en vez de conjugar consideramos tanto multiplicación a izquierda como a derecha obtenemos un morfismo de grupos $\psi : \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \rightarrow \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ definido como

$$(q, t) \mapsto \left(x \mapsto qxt^{-1} \right).$$

Si $q, t \in \mathrm{Sp}(1)$ son tales que $qxt^{-1} = x$ para todo $x \in \mathbb{H}$ (es decir, si el par $(q, t) \in \ker \psi$), entonces poniendo $x = t$ obtenemos que $q = t$ pertenece al centro de \mathbb{H} , es decir $q = t \in \mathbb{R} \cdot 1$. Concluimos que

$$\ker \psi = \{(1, 1), (-1, -1)\}.$$

En particular, con un cálculo de dimensión de $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ (y usando la conexión de este), concluimos que ψ es un cubrimiento doble de $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$. Registramos esta discusión en la observación siguiente.

Observación. El cubrimiento universal de $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ es isomorfo a $\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)$.

Consideramos ahora el espacio \mathbb{H}^n , como \mathbb{H} no es conmutativo mas que “espacio vectorial sobre \mathbb{H} ” podemos hablar de acción *a izquierda* de \mathbb{H} en \mathbb{H}^n . El grupo de matrices invertibles a coeficientes en \mathbb{H} , $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$, está bien definido (porque \mathbb{H} es asociativo) independientemente de la acción de \mathbb{H} en \mathbb{H}^n que hayamos elegido. Sin embargo, definir el determinante de $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$ es más sutil y no será realmente necesario en lo que viene.

Consideramos el producto Hermitiano (sobre \mathbb{H})

$$Q(q, t) = \sum q_i \bar{t}_i$$

y definimos el grupo de matrices

$$\mathrm{Sp}(n) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) : g^{*Q} g = 1\}$$

de matrices que lo preservan, aquí *Q es la adjunta de Q , es decir, transponer y conjugar (en \mathbb{H}) cada coeficiente. Como antes, la acción de $\mathrm{Sp}(n)$ en la esfera unidad \mathbb{S}^{4n-1} de \mathbb{H}^n es transitiva y obtenemos $\mathbb{S}^{4n-1} = \mathrm{Sp}(n)/\mathrm{Sp}(n-1)$. Aplicando de nuevo [A.18](#) obtenemos, como $\mathrm{Sp}(1)$ es simplemente conexo, que $\mathrm{Sp}(n)$ también lo es, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $q \in \mathbb{H}^n$ podemos considerar el par de n -uplas complejas determinadas por $q = z_1(q) + jz_2(q)$. De la misma manera escribimos, para $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$, como

$$g = z_1(g) + jz_2(g)$$

con $z_1(g), z_2(g) \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ (interpretando i a la vez como \mathbb{H} y \mathbb{C}) entonces obtenemos un morfismo de grupos $\psi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) \rightarrow \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ definido como

$$\psi(g) = \begin{pmatrix} z_1(g) & -\bar{z}_2(g) \\ z_2(g) & \bar{z}_1(g) \end{pmatrix}.$$

Obtenemos entonces que $\psi(\mathrm{Sp}(n)) = \mathrm{SU}_{2n} \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$.

- $\sigma^o = d_{\text{id}}\tau^o$ donde $\tau^o : \text{isom}_0(X) \rightarrow \text{isom}_0(X)$ es definido como $f \mapsto \mathcal{J}_o f \mathcal{J}_o$.

El tipo de X es el tipo del par simétrico (\mathcal{J}, σ^o) .

Proposición. Sean X un espacio globalmente simétrico, $o \in X$ y $x, y \in \mathfrak{p}^o$.

- Si X es de tipo compacto entonces X es compacto, la curvatura seccional $\mathbb{k}(\pi^o(\mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y)) \geq 0$ con igualdad si y solo si $[x, y] = 0$.
- Si X es de tipo no-compacto entonces $\mathbb{k}(\pi^o(\mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y)) \leq 0$ con igualdad si y solo si $[x, y] = 0$.
- Si X es de tipo Euclideo, entonces el tensor de curvatura de X es idénticamente nulo.

Demostración. Comenzamos por mostrar la compacidad de X cuando este es de tipo compacto. En efecto, como $\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{p}} < 0$ obtenemos que $\kappa_{\mathfrak{g}}$ es definida negativa en \mathfrak{g} . Por el teorema de Weyl (párrafo 5.8) tenemos que $\text{isom}_0(X)$ es compacto y de acción transitiva en X , por lo tanto X es compacto.

Volviendo al caso general, consideramos el producto interno

$$(\cdot, \cdot) := (\pi^o(\cdot), \pi^o(\cdot))_o$$

en \mathfrak{p} asociado a la métrica Riemanniana de X , es $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ -asociativo por el Corolario 2.5. Del párrafo 2.7 tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{k}(\pi^o(\mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y)) &= \frac{-\left(R(\pi^o(x), \pi^o(y))\pi^o(x), \pi^o(y)\right)_o}{\left(\pi^o(x), \pi^o(x)\right)_o \left(\pi^o(y), \pi^o(y)\right)_o - \left(\pi^o(x), \pi^o(y)\right)_o^2} \\ &= \frac{\left([x, y], x\right)_o}{(x, x)(y, y) - (x, y)^2}. \end{aligned}$$

Como $\kappa_{\mathfrak{g}}$ no degenera en \mathfrak{p} tenemos una transformación lineal $T : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ tal que para todos $x, y \in \mathfrak{p}$ vale $\kappa_{\mathfrak{g}}(Tx, y) = (x, y)$. Esta transformación verifica:

- T es simétrica respecto de $\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{p}}$,
- T conmuta con $\text{ad}_k \forall k \in \mathfrak{k}$, por $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ -asociatividad de $\kappa_{\mathfrak{g}}$ y de (\cdot, \cdot) .

Como $\kappa_{\mathfrak{g}}$ es definida en \mathfrak{p} , T es diagonalizable. Sea

$$\mathfrak{p} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{e}_i$$

la descomposición en espacios propios de T , donde $T|_{\mathfrak{e}_i} = \lambda_i \text{Id}$. Como T es $\kappa_{\mathfrak{g}}$ -simétrica se tiene que los espacios propios de diferente valor propio son $\kappa_{\mathfrak{g}}$ -ortogonales. Más aún, como T conmuta con ad_k para todo $k \in \mathfrak{k}$, $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ preserva cada espacio propio de T .

Observamos además que los valores propios de T son todos del mismo signo, positivos si X es de tipo no-compacto, negativos si X es de tipo compacto.

Observamos que para todos $i \neq j$ se tiene que

$$[\mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_j] = \{0\}$$

ya que, como $\kappa_{\mathfrak{g}}$ es no degenerada en \mathfrak{k} calculamos $\kappa_{\mathfrak{g}}(k, [\mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_j]) = \kappa_{\mathfrak{g}}([k, \mathfrak{e}_i], \mathfrak{e}_j) = \{0\}$, porque $\mathfrak{e}_i \perp_{\kappa_{\mathfrak{g}}} \mathfrak{e}_j$ y $[k, \mathfrak{e}_i] \subset \mathfrak{e}_i$. Concluimos que si $x, y \in \mathfrak{p}^o$ se escriben como $x = \sum x_i$ e $y = \sum y_i$ en la descomposición $\mathfrak{p} = \bigoplus \mathfrak{e}_i$ en espacios propios de T , entonces

$$[x, y] = \sum [x_i, y_i]$$

y usando la identidad de Jacobi se tiene además $[[x_i, y_i], x] = [[x_i, y_i], x_i]$ de donde

$$\{tripleta\} \quad [[x, y], x] = \sum_i [[x_i, y_i], x_i]. \quad (15)$$

Si además x, y son ortonormales respecto de (\cdot, \cdot) , la curvatura seccional es

$$\begin{aligned} \mathbb{k}(\pi^p(\mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y)) &= \left([[x, y], x], y \right) && \text{(párrafo 2.7)} \\ &= \kappa_{\mathfrak{g}}\left([[x, y], x], Ty \right) \\ &= \sum_i \kappa_{\mathfrak{g}}\left([[x_i, y_i], x_i], Ty \right) && \text{(ecuación (15))} \\ &= \sum_i \lambda_i \kappa_{\mathfrak{g}}\left([[x_i, y_i], x_i], y_i \right) && (\mathfrak{e}_i \perp_{\kappa_{\mathfrak{g}}} \mathfrak{e}_j \text{ y } Ty_i = \lambda_i y_i) \\ &= \sum_i \lambda_i \kappa_{\mathfrak{g}}([x_i, y_i], [x_i, y_i]). \end{aligned}$$

Como los valores propios λ_i son todos del mismo signo y $\kappa_{\mathfrak{g}}$ es definida negativa en \mathfrak{k} se concluye la demostración. \square

{Ausencia}

6.2. Ausencia de otros tipos. El objetivo de esa subsección es mostrar el siguiente teorema.

Teorema. *Sea (\mathfrak{g}, σ) un par simétrico ortogonal efectivo, entonces \mathfrak{g} se descompone como la suma de tres ideales*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-,$$

cada uno σ -invariante y tales que $(\mathfrak{g}_0, \sigma|_{\mathfrak{g}_0})$ es de tipo Euclideo, $(\mathfrak{g}_+, \sigma|_{\mathfrak{g}_+})$ es de tipo no-compacto y $(\mathfrak{g}_-, \sigma|_{\mathfrak{g}_-})$ es de tipo compacto.

Demostración. Recordemos que el grupo $\text{Int}(\mathfrak{k})$ es compacto y preserva \mathfrak{p} . Consideramos entonces un producto interno $\text{Int}(\mathfrak{k})$ -invariante (\cdot, \cdot) en \mathfrak{p} y definimos la transformación lineal $T : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ como

$$\forall u, v \in \mathfrak{p} \quad \kappa_{\mathfrak{g}}(u, v) = (Tu, v).$$

Esta transformación está bien definida porque (\cdot, \cdot) no degenera. Más aún, como $\kappa_{\mathfrak{g}}$ es simétrica T es autoadjunta para (\cdot, \cdot) de donde se diagonaliza en un conjunto (\cdot, \cdot) -ortogonal. Escribimos entonces

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \oplus \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$$

donde $\mathfrak{p}_0 = \ker T$, \mathfrak{p}_+ consiste en la suma de espacios propios de T de valor propio positivo y \mathfrak{p}_- es la suma de los espacios propios de T de valor propio negativo. Estos espacios son $\kappa_{\mathfrak{g}}$ -ortogonales dado que son T -invariantes y ortogonales para (\cdot, \cdot) .

Observación. Para todo $k \in \mathfrak{k}$ se tiene $\text{ad}_k \circ T = T \circ \text{ad}_k$.

Demostración. En efecto, como tanto $\kappa_{\mathfrak{g}}$ como (\cdot, \cdot) son $\text{ad}_{\mathfrak{k}}$ -asociativas se tiene que para todos $k \in \mathfrak{k}$ y $u, v \in \mathfrak{p}$

$$\begin{aligned} (T([k, u]), v) &= \kappa_{\mathfrak{g}}([k, u], v) \\ &= -\kappa_{\mathfrak{g}}(u, [k, v]) \\ &= -(Tu, [k, v]) \\ &= ([k, Tu], v). \end{aligned}$$

□

En particular, los subespacios \mathfrak{p}_0 , \mathfrak{p}_+ y \mathfrak{p}_- son $\text{ad}_{\mathfrak{k}}$ -invariantes.

Observación. Se tiene que $\mathfrak{p}_0 = \text{Rad } \kappa_{\mathfrak{g}}$ de donde \mathfrak{p}_0 es un ideal abeliano. Se tiene además que $[\mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-] = \{0\}$.

Demostración. Por definición de \mathfrak{p}_0 se tiene que si $x \in \mathfrak{p}_0$ entonces $\kappa_{\mathfrak{g}}(x, v) = 0$ para todo $v \in \mathfrak{p}$; como además \mathfrak{k} y \mathfrak{p} son $\kappa_{\mathfrak{g}}$ -ortogonales, la misma conclusión vale para todo $v \in \mathfrak{k}$ de donde $x \in \text{Rad } \kappa_{\mathfrak{g}}$. Recíprocamente, como $\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{k}} < 0$ el radical de $\kappa_{\mathfrak{g}}$ está necesariamente contenido en \mathfrak{p} , y por lo tanto en \mathfrak{p}_0 .

Concluimos que \mathfrak{p}_0 es un ideal de \mathfrak{g} . Como además se tiene $[\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_0] \subset \mathfrak{k} \cap \mathfrak{p}_0 = \{0\}$, se deduce que \mathfrak{p}_0 es un ideal abeliano.

Para ver que $[\mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-] = \{0\}$ consideramos $x_{\pm} \in \mathfrak{p}_{\pm}$ y $k \in \mathfrak{k}$ arbitrario. Como $\kappa_{\mathfrak{g}}$ no degenera en \mathfrak{k} y $[\mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-] \subset \mathfrak{k}$ alcanza con mostrar que $\kappa_{\mathfrak{g}}(k, [x_+, x_-]) = 0$, pero por asociatividad

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(k, [x_+, x_-]) = \kappa_{\mathfrak{g}}([k, x_+], x_-) = 0$$

porque $\text{ad}_k \mathfrak{p}_+ \subset \mathfrak{p}_+$ y $\mathfrak{p}_+ \perp_{\kappa_{\mathfrak{g}}} \mathfrak{p}_-$. □

Definimos entonces

- $\mathfrak{k}_+ = [\mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_+]$,
- $\mathfrak{k}_- = [\mathfrak{p}_-, \mathfrak{p}_-]$,
- $\mathfrak{k}_0 = (\mathfrak{k}_+ + \mathfrak{k}_-)^{\perp_{\kappa_{\mathfrak{g}}}} \cap \mathfrak{k}$,

y observamos lo siguiente.

Observación. Se tiene que $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{k}_-$ y que \mathfrak{k}_0 , \mathfrak{k}_+ y \mathfrak{k}_- son ideales de \mathfrak{k} .

Demostración. Por la identidad de Jacobi se tiene que

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}_+] \subset [[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}_+], \mathfrak{p}_+] \subset \mathfrak{k}_+$$

porque \mathfrak{p}_+ es $\text{ad}_{\mathfrak{k}}$ -invariante. Análogamente, se tiene que \mathfrak{k}_- es un ideal de \mathfrak{k} . Más aún, como $[\mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-] = \{0\}$, la identidad de Jacobi implica que

$$[\mathfrak{k}_+, \mathfrak{p}_-] \subset [\mathfrak{p}_+, [\mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-]] = \{0\}$$

de donde

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}_-, \mathfrak{k}_+) = \kappa_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{p}_-, [\mathfrak{k}_+, \mathfrak{p}_-]) = \{0\},$$

usando $\kappa_{\mathfrak{g}}$ -asociatividad. Finalmente, \mathfrak{k}_0 , siendo el ortogonal para una forma $\text{ad}_{\mathfrak{k}}$ -asociativa del ideal $\mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{k}_-$, es también un ideal de \mathfrak{k} . □

Observación. Se tienen además las siguientes relaciones de conmutación:

- $[\mathfrak{k}_+, \mathfrak{p}_-] = [\mathfrak{k}_+, \mathfrak{p}_0] = \{0\}$,
- $[\mathfrak{k}_-, \mathfrak{p}_+] = [\mathfrak{k}_-, \mathfrak{p}_0] = \{0\}$,
- $[\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_-] = [\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_+] = \{0\}$.

Demostración. Las dos primeras ya las demostramos en la prueba de la observación anterior. Para probar la última, recordamos que $\kappa_{\mathfrak{g}}$ es no degenerada tanto en \mathfrak{p}_+ como en \mathfrak{p}_- , mostramos entonces que el espacio vectorial $[\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_{\pm}] \subset \mathfrak{p}_{\pm}$ es ortogonal a \mathfrak{p}_{\pm} :

$$\kappa_{\mathfrak{g}}([\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_{\pm}], \mathfrak{p}_{\pm}) = \kappa_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k}_{\pm}) = \{0\}.$$

□

Las subálgebras $\mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{p}_+$ y $\mathfrak{k}_- \oplus \mathfrak{p}_-$ son entonces ideales σ -invariantes de \mathfrak{g} . La forma de Killing de cada una de ellas es por lo tanto la restricción de $\kappa_{\mathfrak{g}}$. Se concluye entonces que tanto $\mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{p}_+$ como $\mathfrak{k}_- \oplus \mathfrak{p}_-$ son semi-simples.

En este momento hay que dividir la prueba en 2 casos, según $\mathfrak{p}_0 = \{0\}$ o no.

Si $\mathfrak{p}_0 = \{0\}$ entonces \mathfrak{k}_0 es un ideal de \mathfrak{g} y su forma de Killing es definida negativa. Ponemos entonces, si $\mathfrak{p}_- \neq \{0\}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_0 &= \{0\} \\ \mathfrak{g}_- &= \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{k}_- \oplus \mathfrak{p}_- \\ \mathfrak{g}_+ &= \mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{p}_+ \end{aligned}$$

y $\mathfrak{g}_0 = \{0\}$, $\mathfrak{g}_- = \{0\}$, $\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{p}_+$ si $\mathfrak{p}_- = \{0\}$ ¹.

Si $\mathfrak{p}_0 \neq \{0\}$ entonces ponemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_0 &= \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0 \\ \mathfrak{g}_- &= \mathfrak{k}_- \oplus \mathfrak{p}_- \\ \mathfrak{g}_+ &= \mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{p}_+. \end{aligned}$$

En todos los casos, para mostrar que las subálgebras de \mathfrak{k} correspondientes son compactas usamos el siguiente lema.

Lema. *Supongamos que un álgebra de Lie \mathfrak{h} es suma de dos ideales $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$. Sean $\mathfrak{u}_i \subset \mathfrak{h}_i$ subálgebras y definimos $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{u}_2$. Entonces \mathfrak{u} es una subálgebra compacta de \mathfrak{g} si y solo si \mathfrak{u}_1 y \mathfrak{u}_2 son subálgebras compactas de \mathfrak{h}_1 y \mathfrak{h}_2 .*

□

{Xlevel}

6.3. Descomposición al nivel de X. Obtenemos entonces la correspondiente descomposición a nivel de espacios simétricos. Comenzamos con el siguiente lema.

Lema. *Sean (\mathfrak{g}, σ) un par simétrico ortogonal efectivo, G el grupo de Lie simplemente conexo de álgebra \mathfrak{g} y K el subgrupo conexo de G de álgebra \mathfrak{k} . Entonces K es un subgrupo cerrado de G y G/K es un espacio globalmente simétrico simplemente conexo.*

Demostración. Rápidamente, como G es simplemente conexo la involución σ es la diferencial de un morfismo $\tau : G \rightarrow G$, el grupo K es entonces $\text{Fix}(\tau)_0$, que es cerrado.

Como $\text{Ad}_G(K)$ es compacto, \mathfrak{g} tiene un producto interno $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ -asociativo (\cdot, \cdot) , empujando este producto interno a G por multiplicación a izquierda, obtenemos una métrica Riemanniana en G invariante a izquierda e invariante por K a derecha (alcanza con repetir los argumentos del párrafo 5.1).

Esta métrica induce una métrica Riemanniana en el espacio cociente $X = G/K$, invariante por la acción de G . Remarcamos que, como K es cerrado, X es en efecto una variedad diferenciable.

La involución τ induce una involución $\mathcal{J}_{[K]} : X \rightarrow X$ que fija $[K]$ y cuya diferencial en $[K]$ es $-\text{id}$. Observar que si consideramos la aplicación $\varphi_g : X \rightarrow X$, $\varphi_g(p) = g \cdot p$, entonces

$$\mathcal{J}_{[K]} \circ \varphi_g \circ \mathcal{J}_{[K]} = \varphi_{\tau(g)}. \tag{16} \quad \{\text{pp}\}$$

¹La distinción entre estos dos subcasos provienen de exigir que en cada par simétrico la involución no sea trivial.

Con esta igualdad mostramos a mano que $\mathcal{J}_{[K]}$ es una isometría de X (como en la Proposición 3.3) para obtener que X es globalmente simétrico. Finalmente, como G es simplemente conexo y K es conexo, el cociente es simplemente conexo (ver A.18). \square

Corolario. *Sea X un espacio globalmente simétrico simplemente conexo. Entonces X es isométrico al producto Riemanniano*

$$X_0 \times X_+ \times X_-$$

donde X_0 , X_+ y X_- son espacios globalmente simétricos de tipo¹ Euclideo, no-compacto y compacto respectivamente.

Demostración. Consideramos el par simétrico ortogonal efectivo (\mathfrak{g}, σ) asociado a (la elección de un punto en) X donde \mathfrak{g} es el álgebra de Lie de $\text{isom}_0(X)$ y $\text{Fix } \sigma$ es el álgebra de Lie de K^σ , siendo este el estabilizador del punto elegido. Tenemos además que $X = \text{isom}_0(X)/K^\sigma$.

Aplicando el párrafo 6.2 descomponemos

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$$

en ideales σ -invariantes del tipo correspondiente.

Sean además $K_0 \subset G_0$, $K_+ \subset G_+$ y $K_- \subset G_-$ grupos como en el Lema, para los pares $(\mathfrak{g}_0, \sigma|_{\mathfrak{g}_0})$, $(\mathfrak{g}_+, \sigma|_{\mathfrak{g}_+})$ y $(\mathfrak{g}_-, \sigma|_{\mathfrak{g}_-})$ respectivamente. Los cocientes X_0 , X_+ y X_- obtenidos en la conclusión del Lema son globalmente simétricos y simplemente conexos.

Como $G_0 \times G_+ \times G_-$ es simplemente conexo y tiene la misma álgebra de Lie que $\text{isom}_0(X)$, tenemos un morfismo de grupos, que es además un cubrimiento,

$$f : G_0 \times G_+ \times G_- \rightarrow \text{isom}_0(X).$$

Por conexión de $K_0 \times K_+ \times K_-$ tenemos que

$$f(K_0 \times K_+ \times K_-) = (K^\sigma)_0,$$

así que f induce un cubrimiento localmente isométrico $[f] : X_0 \times X_+ \times X_- \rightarrow X$. Como X es simplemente conexo $[f]$ es una isometría global. \square

{G=Isom(G/K)}

6.4. El grupo de isometrías de G/K . Consideramos un par (G, K) de grupos de Lie tales que

- K es un subgrupo cerrado de G ,
- existe un morfismo involutivo $\tau : G \rightarrow G$ tal que $K \subset \text{Fix } \tau$ y $K_e = \text{Fix}(\tau)_e$, (recordar párrafo 2.3),
- $\text{Ad}_G(K)$ es compacto.

Recordemos del Lemma 6.3 que $X = G/K$ es naturalmente un espacio globalmente simétrico.

Proposición. *Si además G es semi-simple, conexo y tal que la acción de G en X es efectiva, entonces $G = \text{isom}_0(X)$.*

Demostración. Supongamos de ahora en más que G es semi-simple, es decir que \mathfrak{g} lo es. El par (\mathfrak{g}, σ) un simétrico ortogonal y efectivo. Consideramos la descomposición en tipos de \mathfrak{g} del párrafo 6.2 y la notación usada en la prueba. El sub-espacio $\mathfrak{p}_0 = \text{Rad } \kappa_{\mathfrak{g}} = \{0\}$.

¹Observar que la notación de signos $+$ y $-$ corresponde al signo de $\kappa_{\mathfrak{g}}$ en el espacio \mathfrak{p} .

Obtenemos entonces un ideal \mathfrak{k}_0 de \mathfrak{g} contenido en \mathfrak{k} . El subgrupo $K_0 \subset K$ conexo de álgebra de Lie \mathfrak{k}_0 es entonces normal en G . La acción de K_0 en X es trivial: para todos $k_0 \in K_0$ y $g \in G$ se tiene que $k_0 g = g k'_0$ para algún $k'_0 \in K_0 \subset K$ de donde $k_0 \cdot g[K] = g[K]$. Como supusimos que la acción de G en X era efectiva (i.e. ningún elemento actúa trivialmente) concluimos que $K_0 = \{0\}$ de donde $\mathfrak{k}_0 = \{0\}$.

Como \mathfrak{g} es semi-simple $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$ y como la acción es efectiva, se tiene que $\mathfrak{k}_0 = \{0\}$, de donde $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{k}_-$. Por definición $\mathfrak{k}_+ = [\mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_+]$ y $\mathfrak{k}_- = [\mathfrak{p}_-, \mathfrak{p}_-]$ lo que muestra que $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{k}$, en particular que $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$.

Consideramos ahora el grupo $\text{isom}_0(X)$, \mathfrak{J} su álgebra de Lie, $\bar{\tau} : \text{isom}_0(X) \rightarrow \text{isom}_0(X)$ definida como

$$f \mapsto \mathfrak{J}_{[K]} \circ f \circ \mathfrak{J}_{[K]}$$

y $\bar{\sigma} : \mathfrak{J} \rightarrow \mathfrak{J}$ su diferencial en id. Sea $\mathfrak{k}^{\bar{\sigma}} \oplus \mathfrak{p}^{\bar{\sigma}} = \mathfrak{J}$ la descomposición en puntos fijos y anti-fijos. Pensamos a \mathfrak{g} como una sub-álgebra de \mathfrak{J} via la diferencial en e de $\varphi : G \rightarrow \text{isom}_0(X)$. Queremos demostrar que $\mathfrak{g} = \mathfrak{J}$.

Comenzamos por observar que la ecuación (16) implica que \mathfrak{p} y $\mathfrak{p}^{\bar{\sigma}}$ coinciden: la ecuación da una inclusión y tienen la misma dimensión, igual a $\dim \mathfrak{T}_{[K]}X$. En particular, como $\mathfrak{p} \oplus [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ es un ideal de \mathfrak{J} (Observación del párrafo 6.1), tenemos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ es un ideal de \mathfrak{J} .

Se deduce entonces que, como $\kappa_{\mathfrak{J}}|_{\mathfrak{g}} = \kappa_{\mathfrak{g}}$ que la descomposición de $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \oplus \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$ es la misma tanto para $\kappa_{\mathfrak{J}}$ como para $\kappa_{\mathfrak{g}}$, en particular $\mathfrak{p}_0 = \{0\}$ y $\mathfrak{k}_0^{\bar{\sigma}}$ es un ideal de \mathfrak{J} contenido en $\mathfrak{k}^{\bar{\sigma}}$. Como la acción de $\text{isom}_0(X)$ es efectiva obtenemos que $\mathfrak{k}_0^{\bar{\sigma}} = \{0\}$ de donde $\mathfrak{k} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{k}^{\bar{\sigma}}$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{J}$. \square

6.5. Dualidad entre espacios globalmente simétricos. Sean (\mathfrak{g}, σ) un par simétrico ortogonal efectivo y $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la descomposición asociada. Consideramos el álgebra complexificada $\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$, en ella tenemos el subespacio real

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}.$$

Es un álgebra de Lie real, dotada de la involución $\sigma^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ definida como $\sigma^*(x + iy) = x - iy$, en otras palabras $\mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$ es la descomposición en puntos fijos y anti-fijos de \mathfrak{g}^* para σ^* . Las relaciones del corchete entre \mathfrak{k} y \mathfrak{p} implican que σ^* es en efecto un morfismo.

Definición 6.1. El par $(\mathfrak{g}^*, \sigma^*)$ es el *par dual* de (\mathfrak{g}, σ) .

Una cuenta directa muestra que el signo de la forma de Killing de \mathfrak{g}^* en $i\mathfrak{p}$ es el opuesto del de $\kappa_{\mathfrak{g}}$ en \mathfrak{p} . Así, la dualidad $(\mathfrak{g}, \sigma) \leftrightarrow (\mathfrak{g}^*, \sigma^*)$ intercambia los tipos compacto y no-compacto.

Terminamos esta introducción con un ejemplo. Consideramos el par $(\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}), \sigma^o)$ asociado a la elección del producto interno usual de \mathbb{R}^d . La involución $\sigma^o(T) = -T^t$ siendo T^t la traspuesta de T . Tenemos entonces

$$\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) = \mathfrak{so}_d(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{p}^o = \mathfrak{so}_d(\mathbb{R}) \oplus \{T \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) : T^t = T\}.$$

El par dual es entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})^* &= \mathfrak{so}_d(\mathbb{R}) \oplus i\{T \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) : T^t = T\} \\ &= \{X + iT : X, T \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) \text{ con } X^t = -X \text{ y } T^t = T\} \\ &= \{Z \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{C}) : \bar{Z}^t = -Z\} \\ &= \mathfrak{su}_d, \end{aligned}$$

con la involución $\sigma^{o*} : Z \mapsto \overline{Z}$. A nivel de espacios simétricos, tenemos entonces que el dual de X_d es el espacio de las *formas reales* de \mathbb{C}^d , i.e. de aquellos \mathbb{R} -subespacios V de \mathbb{C}^d tales que $V \oplus iV = \mathbb{C}^d$.

Enfatizamos que la dualidad es entre pares y no entre álgebras, en efecto si consideramos $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{p,q}$ con la involución de la sección 4, entonces $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{so}_{p+q}$.

{encajes}

6.6. Encajes totalmente geodésicos y representaciones de $\text{isom}_0(X)$. En este párrafo proponemos mostrar lo siguiente.

Corolario. *Sean X un espacio globalmente simétrico de tipo no-compacto y $\rho : \text{isom}_0(X) \rightarrow \text{SL}_d(\mathbb{R})$ una representación inyectiva, entonces existe una aplicación analítica, ρ -equivariante y totalmente geodésica $X \rightarrow X_d$.*

En otras palabras, existe $o \in X_d$ tal que la órbita $\rho(\text{isom}_0(X)) \cdot o$ es una copia totalmente geodésica de X . Más precisamente, si consideramos la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, dada la descripción de las geodésicas del párrafo 2.6, existe un producto interno o preservado por $\rho(K)$ tal que si consideramos $d_e \rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$, entonces $d_e \rho(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}^o$. El corolario será entonces consecuencia del Teorema siguiente.

Teorema. *Sean (\mathfrak{g}, σ) un par simétrico ortogonal efectivo de tipo no-compacto y $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$ un morfismo inyectivo de álgebras de Lie. Entonces existe un producto interno $o \in X_d$ tal que $\phi(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}^o$ y $\phi(\mathfrak{k}) \subset \mathfrak{k}^o$.*

Demostración. Como ϕ es inyectivo consideramos a $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ como una subálgebra de $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$. El álgebra dual está naturalmente contenida en $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{C})$, $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p} \subset \mathfrak{sl}(d, \mathbb{C})$.

Como \mathfrak{g} es de tipo no-compacto, la forma de Killing $\kappa_{\mathfrak{g}^*}$ es definida negativa. Por el Teorema de Weyl (párrafo 5.8), todo grupo de Lie de álgebra de Lie \mathfrak{g}^* es necesariamente compacto, en particular (y porque ϕ es inyectivo) el subgrupo de $\text{SL}(d, \mathbb{C})$ de álgebra \mathfrak{g}^* . Concluimos que existe un producto Hermitiano ω en \mathbb{C}^d invariante por este grupo, lo que implica a nivel de \mathfrak{g}^* que: para todos $x \in \mathfrak{g}^*$ y $u, v \in \mathbb{C}^d$ vale

{hermiciiana}

$$\omega(x \cdot u, v) + \omega(u, x \cdot v) = 0. \quad (17)$$

El producto interno buscado será la parte real de ω restringida a \mathbb{R}^d :

$$o = \Re(\omega)|_{\mathbb{R}^d}.$$

Observemos primero que como $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}^*$ se tiene que \mathfrak{k} preserva \mathbb{R}^d , además por la ecuación (17) las transformaciones de \mathfrak{k} son anti-simétricas para o .

Consideramos entonces $x \in \mathfrak{p}$ y $u, v \in \mathbb{R}^d$ y observamos que

$$\begin{aligned} \Re \omega(x \cdot u, v) &= \Re \omega(ix \cdot u, iv) && (\omega \text{ Hermitiana}) \\ &= -\Re \omega(u, ix \cdot iv) && (\text{Ecuación (17)}) \\ &= \Re \omega(u, x \cdot u), \end{aligned}$$

Es decir que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}^o$ como buscado. □

porque está esto
acá?

Observación. Sea X un espacio globalmente simétrico de tipo no-compacto y $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$ una representación inyectiva, entonces V se descompone en suma de representaciones irreducibles.

Demostración. Sea $o \in \mathbf{X}_d$ el producto interno dado por el Teorema, es decir tal que $\phi(\mathfrak{k}) \subset \mathfrak{k}^o$ y $\phi(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}^o$. Como para todo $x \in \mathfrak{p}$ se tiene que $\phi(x)$ es diagonalizable en un conjunto o -ortogonal, deducimos que si $W \subset \mathbb{R}^d$ es $\phi(x)$ -invariante entonces

- W es suma de espacios propios de $\phi(x)$ y (lo mas importante)
- W^{\perp_o} es también $\phi(x)$ -invariante

Si W es ahora un subespacio $\phi(\mathfrak{g})$ -invariante entonces es en particular $\phi(\mathfrak{k})$ -invariante y $\phi(\mathfrak{p})$ -invariante. Su ortogonal W^\perp es entonces $\phi(\mathfrak{k})$ -invariante (porque $\phi(\mathfrak{k})$ preserva o) y $\phi(\mathfrak{p})$ -invariante por lo recién mencionado. Concluimos entonces que W^\perp es también $\phi(\mathfrak{g})$ -invariante. Un argumento inductivo muestra entonces la observación. \square

{planosSec}

7. PLANOS GEODÉSICOS MAXIMALES

7.1. Subálgebras Abelianas de \mathfrak{p} . Sean A una variedad diferenciable y $f : A \rightarrow X$ una inmersión¹. Decimos que $f(A)$ es *totalmente geodésica* si para todos $p \in A$ y $v \in T_p A$ la geodésica de X por $(f(p), d_p f(v))$ está enteramente contenida en $f(A)$. En este caso (ver ??) si $v, w \in T_p A$ entonces la curvatura seccional $\mathbb{k}(d_p f(\mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w))$ de X coincide con la curvatura seccional de la métrica inducida en A por f . Decimos además $f(A)$ es *plana* si para todos $p \in A$ y $v, w \in T_p A$ se tiene

$$\mathbb{k}(d_p f(\mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w)) = 0.$$

El objetivo de este párrafo es explicar la siguiente biyección:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{subvariedades conexas totalmente geodésicas planas} \\ \text{maximales por } o \end{array} \right\} \begin{array}{c} \uparrow \\ 1:1 \\ \downarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{c} \text{subálgebras Abelianas maximales de } \mathfrak{p}^o \end{array} \right\}$$

Finalmente, $f(A)$ es totalmente geodésica plana *maximal*, si es maximal respecto de la inclusión entre las subvariedades totalmente geodésicas planas. Fijamos de ahora en más una tal inmersión $f : A \rightarrow X$.

En este caso escribimos $o = f(p)$ y consideramos

$$\mathfrak{a} = \{x \in \mathfrak{p}^o : \pi^o(e^{tx}) \subset A \forall t\}.$$

Recordemos del párrafo 2.6 que las geodésicas por o son de la forma $\theta \mapsto \pi^o(e^{t\theta})$, así que \mathfrak{a} se identifica naturalmente al espacio vectorial $\theta^o(d_p f(T_p A))$. Más aún, del párrafo 6.1 se tiene que la curvatura seccional del plano asociado a $\{x, y\} \subset \mathfrak{p}^o$ es nula si y solo si $[x, y] = 0$. Concluimos entonces que \mathfrak{a} es una subálgebra Abeliana de \mathfrak{p}^o , maximal respecto a la inclusión (entre las subálgebras Abelianas de \mathfrak{p}^o). Recíprocamente tenemos lo siguiente.

Lema. *Sea $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}^o$ una subálgebra Abeliana, entonces $f : \mathfrak{b} \rightarrow X$ definida como $f(x) = \pi_o(e^x)$ es una inmersión totalmente geodésica plana. Si además \mathfrak{b} es maximal respecto de la inclusión entonces $f(\mathfrak{b})$ es maximal.*

La prueba es idéntica a la del Párrafo 3.5 para el espacio simétrico X_d .

Demostración. Sea $(,)$ el producto interno en \mathfrak{p}^o tal que $\pi^o : \mathfrak{p}^o \rightarrow T_o X$ es una isometría. Mostraremos que f es una isometría entre el espacio Euclideo $(\mathfrak{b}, (,)|\mathfrak{b})$ y su imagen, que manda geodésicas de \mathfrak{b} en geodésicas de X .

Calculamos la diferencial de f . Sean $u, v \in \mathfrak{b}$, entonces

$$\begin{aligned} d_u f(v) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} f(u + tv) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \pi_o(e^{u+tv}) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \pi_{e^{u \cdot o}}(e^{tv}) \quad ([u, v] = 0) \\ &= \pi^{e^{u \cdot o}}(v). \end{aligned}$$

¹para todo $p \in A$ la diferencial $d_p f$ es inyectiva

Considerando $g = e^u$ en el siguiente diagrama del Párrafo 2.5:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{p}^o & \xrightarrow{\text{Ad}(g)} & \mathfrak{p}^{\varphi_g(o)} \\ \pi^o \downarrow & & \downarrow \pi^{g \cdot o} \\ T_o X & \xrightarrow{d_o \varphi_g} & T_{\varphi_g(o)} X \end{array}$$

tenemos que, como $[u, v] = 0$ tenemos $\text{Ad}(e^u)(v) = v$ de donde $v \in \mathfrak{p}^{e^u \cdot o}$. La curva

$$t \mapsto f(u + tv) = \pi_{e^u \cdot o}(e^{tv})$$

es entonces la geodésica por $f(u)$ de velocidad $d_u f(v)$, es decir, $f(\mathfrak{b})$ es totalmente geodésica. Más aún, para todos $u, v \in \mathfrak{b}$ vale que

$$\theta_{e^u \cdot o}(\pi^{e^u \cdot o}(v)) = v.$$

Como $\text{Ad}(e^u)$ es una isometría entre los productos internos inducidos en \mathfrak{p}^o por π^o y en $\mathfrak{p}^{e^u \cdot o}$ por $\pi^{e^u \cdot o}$, tenemos que para todos $v, w \in \mathfrak{b}$

$$\begin{aligned} \langle d_u f(v), d_u f(w) \rangle_{f(u)} &= \langle \pi^{e^u \cdot o}(v), \pi^{e^u \cdot o}(w) \rangle_{e^u \cdot o} && \text{(cálculo de } d_u f) \\ &= \left(\theta_{e^u \cdot o}(\pi^{e^u \cdot o}(v)), \theta_{e^u \cdot o}(\pi^{e^u \cdot o}(w)) \right)_{e^u \cdot o} \\ &= \langle \text{Ad}(e^u)v, \text{Ad}(e^u)w \rangle_{e^u \cdot o} \\ &= \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

como buscado. Para demostrar la maximalidad usamos el cálculo de curvatura seccional del Párrafo 6.1, especialmente el hecho que si $x, y \in \mathfrak{p}^o$ son tal que $\mathbb{k}(\pi^o(\mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y)) = 0$ entonces $[x, y] = 0$. \square

Cerramos esta sección con la siguiente propiedad:

Lema. *Una subvariedad conexa totalmente geodésica plana maximal de X es un subconjunto cerrado.*

Demostración. Sean A una tal subvariedad, $o \in A$ y \mathfrak{a} la subálgebra abeliana de \mathfrak{p}^o asociada. Denotamos por $G = \text{isom}_0(X)$ y por $G_{\mathfrak{a}}$ el subgrupo de G de álgebra de Lie \mathfrak{a} . La subvariedad A se obtiene como la $G_{\mathfrak{a}}$ -órbita de o :

$$A = G_{\mathfrak{a}} \cdot o.$$

La involución $g \mapsto \mathcal{J}_o g \mathcal{J}_o$ de G , restringida a $G_{\mathfrak{a}}$, coincide con

$$g \mapsto g^{-1}.$$

Esta propiedad pasa a la clausura de $G_{\mathfrak{a}}$ en G . La clausura de $G_{\mathfrak{a}}$ tiene entonces por álgebra de Lie una subálgebra de \mathfrak{p}^o que contiene a \mathfrak{a} . Por maximalidad de A concluimos que $G_{\mathfrak{a}}$ es cerrado.

El estabilizador K' de o dentro de $G_{\mathfrak{a}}$ es por lo tanto compacto y la subvariedad A se obtiene entonces como el cociente del grupo cerrado $G_{\mathfrak{a}}/K'$ que es cerrado dentro de G/K . \square

{accionplanos}

7.2. Transitividad en el conjunto de planos.

Proposición. *Supongamos X de tipo compacto o no-compacto. Sean $o \in X$, $x \in \mathfrak{p}^o$ y \mathfrak{a} una subálgebra maximal de \mathfrak{p}^o . Entonces existe $k \in K_e$ tal que $\text{Ad}(k)x \in \mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}^o$ es otra álgebra abeliana maximal entonces existe $k \in K_e$ tal que $\text{Ad}(k)\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$.*

Demostración. **Supongamos primero que X es de tipo compacto.** La subvariedad A asociada a \mathfrak{a} , al ser además cerrada en un espacio compacto, es entonces un toro (es decir un producto de círculos).

Consideramos entonces $a \in \mathfrak{a}$ tal que la geodésica $\pi_o(e^{ta})$ es densa en A . Por maximalidad de \mathfrak{a} , concluimos que a es tal que si $y \in \mathfrak{p}^o$ conmuta con a entonces $y \in \mathfrak{a}$, es decir

$$\mathfrak{a} = \{y \in \mathfrak{p}^o : [a, y] = 0\}.$$

Fijamos entonces $x \in \mathfrak{p}^o$ arbitrario, queremos encontrar $\ell \in K$ tal que $[\ell \cdot x, a] = 0$. Como el grupo K es compacto la aplicación

$$\ell \mapsto \kappa_{\mathfrak{g}}(a, \text{Ad}(\ell)x)$$

tiene un punto crítico en ℓ_0 , por ejemplo. Para todo $k \in \mathfrak{k}$, la derivada en 0 de la aplicación $t \mapsto \kappa_{\mathfrak{g}}(a, \text{Ad}(e^{tk})(\text{Ad}(\ell_0)x))$ es nula. Como $d\text{Ad} = \text{ad}$ (ver A.1) tenemos que para todo $k \in \mathfrak{k}$

$$0 = \kappa_{\mathfrak{g}}(a, [k, \text{Ad}(\ell_0)x]) = \kappa_{\mathfrak{g}}([\text{Ad}(\ell_0)x, a], k).$$

Como $\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{k}}$ es no degenerada concluimos que $[\text{Ad}(\ell_0)x, a] = 0$ de donde $\ell_0 \cdot x \in \mathfrak{a}$.

Cuando X es de tipo no-compacto su dual X^* es de tipo compacto. Más aún tenemos las relaciones $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_X = \mathfrak{k}_{X^*}$ y $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{X^*} = i\mathfrak{p}_X$. La prueba para el tipo compacto da entonces un elemento $a \in i\mathfrak{p}$ tal que $ia = \{y \in i\mathfrak{p} : [a, y] = 0\}$. Si escribimos $a = ia_0$ con $a_0 \in \mathfrak{p}$ entonces tenemos que

$$\mathfrak{a} = \{y \in \mathfrak{p} : [a_0, y] = 0\}.$$

La prueba concluye de manera análoga. \square

{Zconexo}

7.3. Planos en el caso compacto. Si K es un grupo de Lie compacto conexo de centro finito, es decir que dotando a K de una métrica bi-invariante, obtenemos un espacio globalmente simétrico de tipo compacto, entonces las subvariedades conexas totalmente geodésicas planas por e son toros, es decir, isomorfas (como grupos de Lie) a un producto de círculos. En este párrafo mostramos la siguiente propiedad de conexión de estos toros:

Proposición. *Sean $\mathbb{T} \subset K$ un toro y $k \in Z_K(\mathbb{T})$, es decir tal que $kz = zk$ para todo $z \in \mathbb{T}$. Entonces existe un toro \mathbb{T}' que contiene a \mathbb{T} y a k . Consecuentemente, el centralizador de un toro es un grupo conexo.*

En particular, si \mathbb{T} es maximal entonces $\mathbb{T} = Z_K(\mathbb{T})$. Este hecho debería contrastarse, por ejemplo, con la observación del párrafo 3.7.

Demostración. Sea A la clausura de $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} k^n \mathbb{T}$. Es un grupo abeliano y la componente conexa de la identidad \mathbb{T}_0 es un subgrupo abeliano cerrado y conexo de K , es decir un toro. El grupo A se obtiene entonces como $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} k^n \mathbb{T}_0$ y la compacidad de este implica que la union es finita (como en todo grupo de Lie, la acción por un elemento dado permuta las componentes conexas). El cociente A/\mathbb{T}_0 es entonces un grupo cíclico finito de donde obtenemos la existencia de un elemento $h \in \mathbb{T}_0$ tal que

el grupo $\{h^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es denso en A . Como K es compacto y conexo, la exponencial es sobreyectiva (Corolario del párrafo 5.5). Sea entonces $x \in \mathfrak{k}$ tal que $e^x = h$. La clausura del grupo $\{e^{tx} : t \in \mathbb{R}\}$ es un toro \mathbb{T}' que contiene a \mathbb{T} y a k . \square

Esta prueba se encuentra, por ejemplo, en Knapp [6, Theorem 4.50] o en Helgason [4,].

8. RAÍCES RESTRINGIDAS DE UN ESPACIO SIMÉTRICO DE TIPO NO-COMPACTO:
CONTENIDO GEOMÉTRICO Y DINÁMICO

{raicesR}

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie real semi-simple de forma de Killing κ . Una morfismo involutivo $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ tal que la forma bilineal

$$\kappa^\sigma(x, y) := -\kappa(x, \sigma(y))$$

es (simétrica y) definida positiva es llamado una *involución de Cartan* de \mathfrak{g} .

Si X es un espacio globalmente simétrico de tipo no-compacto y \mathfrak{g} es el álgebra de Lie de $\text{isom}_0(X)$, entonces la involución $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ determinada por la elección de un punto $o \in X$ es una involución de Cartan. En efecto, escribiendo $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ tenemos que $\mathfrak{k} \perp_\kappa \mathfrak{p}$, que $\kappa|_{\mathfrak{k}} < 0$ y que $\kappa|_{\mathfrak{p}} > 0$ (por ser de tipo no-compacto). Una cuenta implica entonces que la forma κ^σ es definida positiva. Recíprocamente, si \mathfrak{g} tiene una involución de Cartan y X es un espacio simétrico asociado al par (\mathfrak{g}, σ) , entonces X es de tipo no-compacto.

En la sección 10 mostramos que toda álgebra semi-simple \mathfrak{g} no-compacta (es decir, con κ no definida) admite una involución de Cartan.

En esta sección estudiamos el *sistema de raíces restringidas* asociado a una involución de Cartan $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, que definimos a continuación, y su contenido geométrico en X . Fijamos entonces una tal involución.

Como κ es $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -asociativa, vemos que si $x \in \mathfrak{p}$ entonces ad_x es auto-adjunta respecto del producto interno κ^σ , es decir, $\text{ad}_x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ es diagonalizable (en una base κ -ortogonal).

Fijamos una subálgebra Abeliiana maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. Tenemos entonces que las transformaciones de $\text{ad}(\mathfrak{a}) = \{\text{ad}_x : x \in \mathfrak{a}\}$ son *simultáneamente diagonalizables*. Si $v \in \mathfrak{g}$ es un vector propio común de ad_a para $a \in \mathfrak{a}$, entonces “el valor propio de a en v ” es una aplicación lineal en a . Estos valores propios (de $\text{ad}(\mathfrak{a})$) se llaman las *raíces restringidas* de \mathfrak{g} (y de \mathfrak{a}). Es un subconjunto de \mathfrak{a}^* que se denota por Φ . Se tiene, por definición, que

{desc}
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{donde} \quad \mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} : \forall a \in \mathfrak{a} [a, x] = \alpha(a)x\}. \quad (18)$$

El conjunto Φ juega un papel esencial en el estudio geométrico de los espacios simétricos y en la clasificación de estos. Es un invariante por isometrías, tan especial que con éste y poca información más se identifica únicamente el espacio simétrico en cuestión.

El objetivo de esta sección es mostrar las siguientes propiedades de aritmeticidad de Φ . Denotamos por $(,)$ la restricción $\kappa|_{\mathfrak{a}}$; es un producto interno. Abusando de notación escribimos también $(,)$ para el producto interno asociado en dual \mathfrak{a}^* .

Dadas $\varphi, \psi \in \mathfrak{a}^*$, el coseno del ángulo entre $\mathbb{R}_{\geq 0}\psi$ y $\mathbb{R}_{\geq 0}\varphi$ es $(\varphi, \psi)/|\varphi||\psi|$. Si proyectamos φ sobre $\mathbb{R}\psi$, la proporción que este vector ocupa en ψ es entonces $(\varphi, \psi)/|\psi|^2$. Aprovechamos para introducir la siguiente notación, para $\varphi, \psi \in \mathfrak{a}^*$

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{2(\varphi, \psi)}{|\psi|^2}.$$

{roots}

Theorem 8.1. *Sea Φ el conjunto de raíces de un par simétrico ortogonal de tipo no-compacto (\mathfrak{g}, σ) . Entonces Φ es un sistema de raíces abstracto, es decir, para todas $\alpha, \beta \in \Phi$ se tiene*

- Φ genera \mathfrak{a}^* ,
- $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$,

$$- \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha \in \Phi.$$

La condición $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ quiere decir que al proyectar β sobre α , obtenemos un elemento de $(\frac{1}{2}\mathbb{Z})\alpha$ (ver figura 6). La condición

$$\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha \in \Phi$$

equivale a decir que Φ es invariante por las simetrías axiales respecto de los hiperplanos α^\perp .

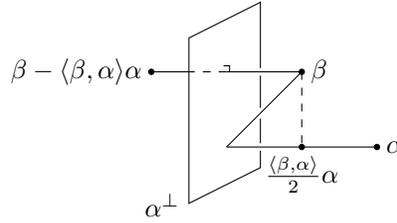


FIGURA 6. Si $\alpha, \beta \in \Phi$ entonces la proyección de β sobre α pertenece a $(\mathbb{Z}/2)\alpha$.

{bbLaa}

Comenzamos por registrar la siguiente simple observación, que muestra la primer propiedad del Teorema.

Observación. El conjunto Φ es finito y genera \mathfrak{a}^* .

Demostración. La finitud está explicada arriba, para ver que es un generador de \mathfrak{a}^* observamos que si $a \in \mathfrak{a}$ es tal que $\alpha(a) = 0$ para toda $\alpha \in \Phi$, entonces $\text{ad}_a(x) = [a, x] = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. Es decir que $a \in \mathbb{Z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ porque \mathfrak{g} es semi-simple. \square

Lema. \mathfrak{g}_0 es σ -invariante de donde, poniendo $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k}$, tenemos

$$\mathfrak{g}_0 = (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{p}) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}.$$

8.1. El contenido geométrico en X del sistema de raíces restrictas.

{weylG}

8.1.1. Grupo de Weyl: isometrías de X que preservan un plano geodésico maximal. Si \mathfrak{a} es un álgebra Abeliana maximal de \mathfrak{p} entonces el grupo $e^\mathfrak{a}$ preserva el plano geodésico maximal $\pi^o(e^\mathfrak{a})$ determinado por ésta. Para entender el grupo de las isometrías de X que preservan $\pi^o(e^\mathfrak{a})$ alcanza con entender el grupo de aquellas que preservan \mathfrak{a} y un punto dado, por ejemplo o . Consideramos entonces el *normalizador* de \mathfrak{a} en K :

$$\mathbf{N}_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K : \text{Ad}(k)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}.$$

Aquellos elementos de K que actúan trivialmente en \mathfrak{a} , es decir el *centralizador* de K en \mathfrak{a} ,

$$\mathbf{Z}_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K : \forall a \in \mathfrak{a} \text{ Ad}(k)a = a\},$$

es un subgrupo normal de $\mathbf{N}_K(\mathfrak{a})$ y queremos entender el *grupo de Weyl*

$$\mathcal{W}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \mathbf{N}_K(\mathfrak{a})/\mathbf{Z}_K(\mathfrak{a}).$$

Una observación fundamental es que $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ es un grupo *finito*:

Observación. Las álgebras de Lie de $\mathbf{N}_K(\mathfrak{a})$ y de $\mathbf{Z}_K(\mathfrak{a})$ coinciden con \mathfrak{m} .

Demostración. El álgebra de Lie de $\mathbf{N}_K(\mathfrak{a})$ es $\{k \in \mathfrak{k} : [k, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}\}$, queremos mostrar que si k es un elemento de este álgebra entonces $k \in \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{m}$ (i.e. $[k, a] = 0$ para todo $a \in \mathfrak{a}$). Considerando la descomposición de \mathfrak{g} en espacios $\text{ad}_{\mathfrak{a}}$ -propios (ecuación (18)) escribimos $k = k_0 + \sum_{\alpha \in \Phi} k_{\alpha}$ con $k_0 \in \mathfrak{g}_0$ y, para toda $\alpha \in \Phi$, $k_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$. Tenemos entonces, para toda $a \in \mathfrak{a}$ que

$$\mathfrak{g}_0 \ni [a, k] - [a, k_0] = [a, k] = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(\alpha)k_{\alpha} \in \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Como la descomposición es directa, tenemos que ambos términos de la igualdad se anulan, i.e. $[k, a] = 0$ como deseado. \square

Más aún, este grupo finito preserva el conjunto de raíces Φ . En efecto, si $\alpha \in \Phi$, $v \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ y $k \in \mathbf{N}_K(\mathfrak{a})$ entonces para todo $a \in \mathfrak{a}$ se tiene

$$\begin{aligned} [a, \text{Ad}(k)v] &= \text{Ad}(k)[\text{Ad}(k^{-1})a, v] \\ &= \text{Ad}(k)\left(\alpha(\text{Ad}(k^{-1})a)v\right) \quad (\text{Ad}(k)a \in \mathfrak{a}) \\ &= \alpha(\text{Ad}(k^{-1})a)(\text{Ad}(k)v), \end{aligned}$$

es decir que $\text{Ad}(k)v$ es un vector propio de $\text{ad}(k)a$ de valor propio $\alpha(\text{Ad}(k^{-1})a)$, en otras palabras $\alpha \circ \text{Ad}(k^{-1})$ es una raíz.

Mostraremos en el párrafo 8.4 que $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ coincide con el grupo de $\text{O}(\mathfrak{a}^*, (\cdot, \cdot))$ generado por las reflexiones en los hiperplanos $\{\alpha^{\perp} : \alpha \in \Phi\}$. Este último grupo es conocido como *el grupo de Weyl* de Φ .

{planosa}

8.1.2. Planos maximales por $a \in \mathfrak{a}$. Observamos primero que si $\alpha \in \Phi$ y $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ entonces $\sigma(x) \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$: en efecto, como σ preserva el corchete y $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ se tiene, para todo $a \in \mathfrak{a}$,

$$[a, \sigma(x)] = \sigma[-a, x] = \sigma(-\alpha(a)x) = -\alpha(a)\sigma(x).$$

Dado $a \in \mathfrak{a}$ usamos las raíces que lo anulan para encontrar otros planos geodésicos maximales por a . Observamos que si $\alpha \in \Phi$ y $a \in \ker(\alpha)$ entonces para todo $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}$, el elemento $x + \sigma(x)$ de \mathfrak{k} conmuta con a ; en efecto

$$[a, x + \sigma(x)] = \alpha(a)x - \alpha(a)\sigma(x) = 0.$$

Esto implica que el grupo a un parámetro $t \mapsto e^{t(x+\sigma(x))}$ fija a , es decir

$$\text{Ad}(e^{t(x+\sigma(x))})a = a.$$

Este subgrupo a un parámetro de K tiene por álgebra de Lie $\{x + \sigma(x) : x \in \mathfrak{g}_{\alpha}\}$, que intersecta trivialmente \mathfrak{m} , el álgebra de Lie de $\mathbf{N}_K(\mathfrak{a})$ (ver párrafo anterior). Es decir que $\text{Ad}(e^{t(x+\sigma(x))})\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}$, salvo para un conjunto discreto de parámetros t . Obtenemos así una familia a un parámetro de planos geodésicos maximales por a .

Por otro lado, si $a \in \mathfrak{a}$ es tal que $\alpha(a) \neq 0$ para toda raíz $a \in \alpha$, entonces \mathfrak{a} es la única álgebra Abeliiana maximal de \mathfrak{p} que contiene a a , es decir que $\pi^{\circ}(a)$ es tangente a un único plano geodésico maximal de \mathcal{X} . Antes de demostrar este hecho aprovechamos para introducir una definición.

Definición. Una *cámara de Weyl* es (la clausura topológica de) una componente conexa de $\mathfrak{a} - \bigcup_{\alpha \in \Phi} \ker \alpha$.

Tomar la clausura topológica de una componente conexa (en lugar de simplemente "la componente conexa") es una elección arbitraria que depende de la literatura.

Observación. Si $a \in \mathfrak{a}$ pertenece al interior de una cámara y $x \in \mathfrak{g}$ es tal que $[x, a] = 0$ entonces $x \in \mathfrak{g}_0$, en particular \mathfrak{a} es la única sub-álgebra maximal de \mathfrak{p} que contiene a a .

Demostración. En efecto, si para $x \in \mathfrak{g}$ se tiene que $[a, x] = 0$, entonces x es un vector propio de ad_a , de valor propio 0, como $\alpha(a) \neq 0$ para todo $\alpha \in \Phi$ tenemos que necesariamente $x \in \mathfrak{g}_0$. Si suponemos además que $x \in \mathfrak{p}$, concluimos que $x \in \mathfrak{a}$. \square

{sl2reps}

8.2. Representaciones de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Si $o \in X_2$, entonces el par $(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), -\cdot^*o)$ es simétrico, ortogonal, de tipo no-compacto. Del párrafo 6.6 tenemos que toda representación $\phi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{sl}(V, \mathbb{R})$ se descompone en suma de irreducibles. En este párrafo mostramos la siguiente descripción de las representación irreducibles (ver figura 7). Fijamos la siguiente base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$:

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y recordamos que $[e, f] = h$, $[h, e] = 2e$ y $[h, f] = -2f$.

Proposición. Sea $\phi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{sl}(V)$ una representación irreducible. Entonces existe $v_+ \in V$ tal que los elementos no nulos de $\{f_\phi^n v_+ : n \in \mathbb{N}\}$ forman una base de V . Esta base consiste en vectores propios de h_ϕ donde el valor propio de $f_\phi^n v_+$ es $\dim V - 1 - 2n$.

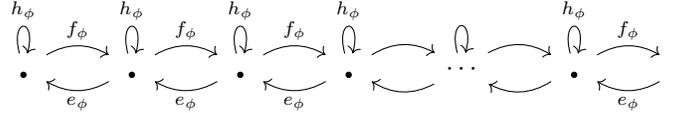


FIGURA 7

{sl2}

Observación. En particular, los valores propios de h en cualquier representación de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ pertenecen a \mathbb{Z} .

Demostración. Del Teorema 6.6 se tiene que h_ϕ es diagonalizable, tiene entonces un vector propio. Observamos además que si v es propio para h_ϕ entonces tanto $f_\phi v$ como $e_\phi v$ son vectores propios de h_ϕ . En efecto, si $h_\phi v = \lambda v$ entonces

$$h_\phi f_\phi v = \phi([h, f])v - f_\phi h_\phi v = -2f_\phi v + \lambda f_\phi v = (\lambda - 2)f_\phi v, \quad (19) \quad \{\text{vp2}\}$$

(el cálculo para e es análogo). Tenemos además que el valor propio de $f_\phi v$ es $\lambda - 2$ y que el de $e_\phi v$ es $\lambda + 2$. Fijamos entonces un vector propio v y aplicamos sucesivamente $e_\phi(\phi^{k-1}(e))v$, como los valores propios aumentan y solo hay finitos posibles valores, eventualmente tenemos un v_+ , propio para h_ϕ , de valor propio μ , y tal que $e_\phi v_+ = 0$.

Afirmamos que el espacio W generado por $\{f_\phi^n v_+ : n \in \mathbb{N}\}$ es V . Por irreducibilidad, alcanza con ver que es un espacio $\phi(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$ -invariante. Como claramente es invariante por h_ϕ y f_ϕ , alcanza con ver que es e_ϕ -invariante. Aplicamos un proceso inductivo, observar que

$$\begin{aligned} e_\phi f_\phi^n v_+ &= \phi([e, f])f_\phi^{n-1} v_+ + f_\phi e_\phi f_\phi^{n-1} v_+ \\ &= h_\phi f_\phi^{n-1} v_+ + f_\phi e_\phi f_\phi^{n-1} v_+, \end{aligned}$$

de donde concluimos que

$$e_\phi f_\phi^{n-1} v_+ \in \mathbb{R} f_\phi^{n-2} \text{ implica } e_\phi f_\phi^n v_+ \in \mathbb{R} f_\phi^{n-1}.$$

Comenzando por $e_\phi f_\phi v_+ = h_\phi v_+$ deducimos inductivamente el resultado.

Para terminar, como la traza de $h_\phi = \phi([e, f])$ es 0 y h_ϕ es diagonalizable, tenemos que $0 = \sum_{i=0}^{\dim V} (\mu - 2i)$ de donde $\mu = \dim V - 1$. \square

{labelW}

8.3. Prueba del Teorema 8.1. Esta prueba puede encontrarse en Knapp [6, VI.5]. Consideramos el vector dual t_α de $\alpha \in \Phi$, $\alpha(u) = \kappa(t_\alpha, u)$ y

$$h_\alpha = \frac{2}{|\alpha|^2} t_\alpha.$$

Lema. Para todo $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ vale que $[x, \sigma(x)] = \kappa_{\mathfrak{g}}(x, \sigma(x)) t_\alpha$. Considerando $x_\alpha := x / (|\alpha|^2 \kappa_{\mathfrak{g}}(x, \sigma(x)))$ e $y_\alpha := \sigma(x)$ obtenemos que

$$e \mapsto x_\alpha, \quad f \mapsto y_\alpha, \quad h \mapsto h_\alpha$$

es un isomorfismo de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ con la subálgebra \mathfrak{s}_α generada por $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$. Consideramos ahora $z_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ tal que $\kappa(z_\alpha, \sigma(z_\alpha)) = -2/|\alpha|^2$, entonces elemento $r_\alpha = \exp\left((\pi/2)(z_\alpha + \sigma(z_\alpha))\right) \in \mathbf{N}_K(\mathfrak{a})$ actúa en \mathfrak{a} como la simetría axial respecto de $\ker \alpha$.

Observar que, por definición de σ , la forma $(x, y) \mapsto -\kappa_{\mathfrak{g}}(x, \sigma(y))$ es definida positiva en \mathfrak{g} , en particular $\kappa(x, \sigma(x)) \neq 0$ y el elemento x_α del Lema está bien definido.

Demostración. Se tiene $[x, \sigma(x)] \in \mathfrak{p}$, dado que es anti-fijo por σ . Por otro lado, como $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ se tiene que $\sigma(x) \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, de donde $[x, \sigma(x)] \in \mathfrak{g}_0$. Combinando ambas cosas obtenemos que $[x, \sigma(x)] \in \mathfrak{a}$. Consideramos entonces $a \in \mathfrak{a}$ arbitrario y observamos que

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathfrak{g}}\left(a, [x, \sigma(x)]\right) &= \alpha(a) \kappa_{\mathfrak{g}}(x, \sigma(x)) && (\text{ad}_{\mathfrak{g}}\text{-asociatividad de } \kappa_{\mathfrak{g}}) \\ &= \kappa_{\mathfrak{g}}(a, t_\alpha) \kappa_{\mathfrak{g}}(x, \sigma(x)) \\ &= \kappa_{\mathfrak{g}}\left(a, \kappa_{\mathfrak{g}}(x, \sigma(x)) t_\alpha\right). \end{aligned}$$

Como a es arbitrario y $\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{a}}$ es no degenerada obtenemos $[x, \sigma(x)] = \kappa_{\mathfrak{g}}(x, \sigma(x)) t_\alpha$. El resto de la prueba es un cálculo directo, en efecto alcanza con verificar que $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$, $[x_\alpha, h_\alpha] = 2h_\alpha$ e $[y_\alpha, h_\alpha] = -2h_\alpha$.

Para demostrar el último enunciado, recordemos del A.1 que para todo $z \in \mathfrak{g}$ vale que $\text{Ad}(e^{tz}) = e^{t \text{ad}_z}$. Como en el párrafo 8.1.2, tenemos que si $a \in \ker \alpha$ entonces para todo t vale $\text{Ad}(e^{t(z_\alpha + \sigma(z_\alpha))})a = a$, en particular r_α fija $\ker \alpha$. Calculamos por separado:

$$\begin{aligned} \text{ad}_{(\pi/2)(z_\alpha + \sigma(z_\alpha))}(h_\alpha) &= (\pi/2)([z_\alpha, h_\alpha] + [\sigma(z_\alpha), h_\alpha]) \\ &= -\pi(z_\alpha - \sigma(z_\alpha)), \\ \left(\text{ad}_{(\pi/2)(z_\alpha + \sigma(z_\alpha))}\right)^2(h_\alpha) &= (\pi^2/2)([z_\alpha + \sigma(z_\alpha), z_\alpha - \sigma(z_\alpha)]) \\ &= -\pi^2 h_\alpha \end{aligned}$$

Finalmente tenemos que

$$\begin{aligned}
\text{Ad}\left(e^{(\pi/2)(z_\alpha + \sigma(z_\alpha))}\right)h_\alpha &= \exp\left((\pi/2)(\text{ad}_{z_\alpha + \sigma(z_\alpha)})\right)h_\alpha \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\text{ad}_{(\pi/2)(z_\alpha + \sigma(z_\alpha))})^n h_\alpha \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} (\text{ad}_{(\pi/2)(z_\alpha + \sigma(z_\alpha))})^{2m} h_\alpha \\
&\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} \text{ad}_{(\pi/2)(z_\alpha + \sigma(z_\alpha))} \circ \left(\text{ad}_{(\pi/2)(z_\alpha + \sigma(z_\alpha))}^2\right)^j h_\alpha \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} (-\pi^2)^m h_\alpha - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \pi^{2j+1} (z_\alpha - \sigma(z_\alpha)) \\
&= \cos(\pi)h_\alpha + \sin(\pi)(z_\alpha + \sigma(z_\alpha)) \\
&= -h_\alpha.
\end{aligned}$$

□

Prueba del Teorema 8.1. Como Φ es $\mathbf{N}_K(\mathfrak{a})$ -invariante, del Lema obtenemos que para toda $\alpha \in \Phi$, el conjunto Φ es preservado por la simetría axial respecto de α^\perp . Para ver que para todas $\alpha, \beta \in \Phi$ se tiene $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$ usamos el álgebra \mathfrak{s}_α del Lema, isomorfa a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ y tal que h_α corresponde a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Si $x \in \mathfrak{g}_\beta$ entonces x es un vector propio de ad_{h_α} de valor propio $\beta(h_\alpha)$, por el párrafo 8.2 este valor propio es entero, es decir que $\beta(h_\alpha) = \langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$. □

{w=w}

8.4. La relación entre $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ y Φ .

Proposición. *El grupo de Weyl $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ es generado por las simetrías axiales respecto de los hiperplanos $\{\ker \alpha : \alpha \in \Phi\}$.*

El grupo generado por las dichas reflexiones es llamado *el grupo de Weyl* de Φ y denotado por $\mathcal{W}(\Phi)$, ver 9.5.

Demostración. El Lema del párrafo 8.3 muestra que $\mathcal{W}(\Phi) \subset \mathcal{W}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Necesitamos el hecho siguiente del párrafo 9.5: el grupo $\mathcal{W}(\Phi)$ actúa transitivamente en el conjunto de cámaras de Weyl y el estabilizador de una cámara es trivial. Alcanza entonces con mostrar que si $k \in \mathbf{N}_K(\mathfrak{a})$ preserva una cámara de Weyl, entonces es la identidad.

Si k preserva una cámara \mathfrak{a}^+ , permuta entonces el conjunto de raíces simples asociadas. La suma $2\delta = \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$ es entonces fija por k y pertenece al interior de \mathfrak{a}^+ . En particular (recordar la observación del párrafo 8.1.2), el centralizador de δ en \mathfrak{g} es \mathfrak{g}_0 .

Consideramos entonces el dual compacto $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$ junto con el grupo compacto conexo $U = \text{Int}_{\mathfrak{g}^c}(\mathfrak{g}^*)$. Por definición $k \in K \subset U$ centraliza el toro

$$\mathbb{T} = \overline{\{e^{it\delta} : t \in \mathbb{R}\}} \subset U.$$

Es decir, k pertenece al centralizador $Z_U(\mathbb{T})$ que, aplicando el párrafo 7.3, es un grupo conexo. Vamos a mostrar que todo elemento de $Z_U(\mathbb{T})$ actúa trivialmente en \mathfrak{a} . La ventaja de ser este grupo conexo, es que alcanza con verificar esta afirmación

para el álgebra de Lie de $Z_U(\mathbb{T})$, es decir, alcanza con mostrar que todo elemento de

$$Z_{\mathfrak{g}^*}(\mathfrak{s}) = \{x \in \mathfrak{g}^* : [x, \mathfrak{s}] = 0\}$$

conmuta con \mathfrak{a} , donde \mathfrak{s} es el álgebra de Lie de \mathbb{T} .

Si escribimos $x \in Z_{\mathfrak{g}^*}(\mathfrak{s})$ como $x = l + iy$ con $l \in \mathfrak{k}$ e $y \in \mathfrak{p}$ obtenemos, como $[x, i\delta] = 0$, que $[l, \delta] = i[y, \delta]$. El primer elemento está en \mathfrak{p} y el segundo en $i\mathfrak{k}$; como estos subespacios no se intersectan, ambos corchetes son nulos. Como δ esta en el interior de una cámara, la observación del párrafo 8.1.2 implica entonces que $l \in \mathfrak{m}$ y que $y \in \mathfrak{a}$. En particular, x actúa trivialmente en \mathfrak{a} , como buscado. \square

8.5. Estratificación de la esfera unidad y la proyección de Cartan.

Corolario. Sean $o \in X$, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}^o$ una subálgebra Abeliana maximal y \mathfrak{a}^+ una cámara de Weyl, entonces el espacio de órbitas $\mathbb{T}_o^1 X / K^o$ se identifica naturalmente a $\mathbb{P}(\mathfrak{a}^+)$.

8.6. Espacios raíz. Enunciamos algunas propiedades rápidas de los espacios raíz:

- $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$: sale de la identidad de Jacobi.
- Si $\alpha, \beta \in \Phi \cup \{0\}$ son tales que $\alpha + \beta \neq 0$ entonces $\mathfrak{g}_\alpha \perp_\kappa \mathfrak{g}_\beta$: se deduce de la $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -asociatividad de $\kappa_{\mathfrak{g}}$.
- Para toda $\alpha \in \Phi$

$$\mathbb{R}t_\alpha \oplus \mathfrak{m} \oplus \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}} \mathfrak{g}_{\lambda\alpha}$$

es una subálgebra semi-simple de rango 1: en efecto, si $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $y \in \mathfrak{g}_\alpha$ entonces el corchete $[x, y] \in \mathfrak{g}_0$; más aún $[x, y] - \kappa_{\mathfrak{g}}(x, y)t_\alpha$ es ortogonal a \mathfrak{a} ¹ de donde $[x, y] - \kappa_{\mathfrak{g}}(x, y)t_\alpha \in \mathfrak{m}$.

8.7. El contenido dinámico del conjunto de raíces restrictas. A pesar de no ser necesariamente un flujo, el *flujo de cámaras de Weyl* es el nombre que se le da a la acción de \mathfrak{a} a derecha

$$\begin{aligned} \phi : \mathfrak{a} \times G &\rightarrow G \\ (a, g) &\mapsto \phi_a(g) = ge^a, \end{aligned}$$

o más comúnmente en el espacio de planos totalmente geodésicos maximales *parametrizados* de X . Como el grupo K^o actúa transitivamente en el conjunto de planos por o (Proposición 7.2) todo plano parametrizado de X es de la forma $a \mapsto ge^a \cdot o$ para algún $g \in G$.

Consideramos entonces el espacio de funciones

$$\mathcal{P}_X = \{p : \mathfrak{a} \rightarrow X \text{ de la forma } p(a) = ge^a \cdot o\}$$

con la topología compacto-abierta. Este espacio esta equipado de una acción de \mathfrak{a} que consiste en 'cambiar el punto base', o equivalentemente

$$(b \cdot p)(a) := p(a - b) = ge^{-b}e^a \cdot o.$$

El grupo G actúa transitivamente en este espacio y el estabilizador de $a \mapsto e^a \cdot o$ es el grupo

$$M = \{k \in K^o : ke^a = e^a k \text{ para todo } a \in \mathfrak{a}\},$$

¹para $a \in \mathfrak{a}$

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(a, [x, y]) = \kappa_{\mathfrak{g}}([a, x], y) = \alpha(a)\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = \kappa_{\mathfrak{g}}(a, t_\alpha)\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = \kappa_{\mathfrak{g}}(a, \kappa_{\mathfrak{g}}(x, y)t_\alpha),$$

de álgebra de Lie \mathfrak{m} . Así el cociente G/M se identifica al espacio de planos parametrizados de X y la acción a derecha de \mathfrak{a} , es decir, el flujo de cámaras de Weyl, $\phi_a(gM) = ge^aM$ es conjugado a la acción 'cambiar el punto base' en \mathcal{P}_X .

El objetivo de esta sección es describir parcialmente las distribuciones estables/inestables de esta acción cuando dotamos a G de una métrica invariante a izquierda y K -invariante a derecha (como en el Lemma 6.3 por ejemplo).

Para $a \in \mathfrak{a}^+$ consideramos el conjunto de raíces positivas

$$\Phi_a^+ = \{\alpha \in \Phi : \alpha(a) \neq 0\}$$

y definimos las subálgebras

$$\mathfrak{u}_a = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_a^+} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{y} \quad \mathfrak{u}_a = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_a^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Son en efecto álgebras de Lie gracias a la inclusión $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ y el hecho que elegimos $a \in \mathfrak{a}^+$. Los grupos conexos asociados U_a y \tilde{U}_a son llamados *radicales unipotentes* de a .

Teorema. *Existe $C > 0$ y, para todo $a \in \mathfrak{a}^+$ una constante $\lambda > 0$ que depende únicamente de la dirección $\mathbb{R}a \in \mathbb{P}(\mathfrak{a})$, tal que para todos $g \in G$ y $a \in \mathfrak{a}^+$ y $u \in \mathfrak{u}_a - \{0\}$ vale*

$$d(ge^u e^{ta}, ge^{ta}) < Ce^{-\lambda t} d(e^u, \text{id}).$$

Demostración. Usando la invariancia a izquierda de la métrica, vemos que alcanza con demostrar que $\phi_{e^{-a}}(e^u) = e^{-ta} e^u e^{ta} \rightarrow \text{id}$ exponencialmente en t cuando $t \rightarrow \infty$ con constantes que dependen solo de $d(e^u, \text{id})$ y la dirección $\mathbb{R} \cdot a$. Consideramos entonces la curva $\alpha : s \mapsto e^{su}$ para $s \in [0, 1]$, su longitud es $\|u\|$. Vamos a mostrar que la longitud de $\phi_{e^{-ta}}(\alpha)$ decrece exponencialmente con t .

La curva $s \mapsto \phi_{e^{-ta}}(\alpha(s))$ es un grupo a un parametro de G , de velocidad en id dada por $\text{Ad}(e^{-ta})(u)$. Así, para todo $s_0 \in [0, 1]$ vale que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=s_0} \phi_{e^{-ta}}(\alpha(s)) \right\| = \|\text{Ad}(e^{-ta})(u)\|.$$

Por otro lado, usando el corolario A.1 y escribiendo $u = \sum_{\alpha \in \Phi_a^+} u^\alpha$ con $u^\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, tenemos

$$\begin{aligned} \text{Ad}(e^{-ta})u &= e^{-t\text{ad}_a}u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \text{ad}_a^n(u) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \sum_{\alpha \in \Phi_a^+} \text{ad}_a^n(u^\alpha) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \sum_{\alpha \in \Phi_a^+} \alpha(a)^n u^\alpha \\ &= \sum_{\alpha \in \Phi_a^+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t\alpha(a))^n}{n!} u^\alpha \\ &= \sum_{\alpha \in \Phi_a^+} e^{-t\alpha(a)} u^\alpha. \end{aligned} \tag{20} \quad \{\text{Ad}t\}$$

Como para toda $\alpha \in \Phi_a^+$ tenemos $\alpha(a) > 0$, concluimos que

$$\|\text{Ad}(e^{-ta})u\| < Ce^{-\lambda t}$$

donde la constante C depende solo de u y λ depende solo de la dirección \mathbb{R}_+a , lo que concluye la prueba. \square

De hecho, el cálculo 20 da el siguiente lema.

Lema 8.2. *Escribiendo $x = x_0 + \sum_{\alpha \in \Phi} x_\alpha$ tenemos $\text{Ad}(e^{-ta})x = \sum_{\alpha \in \Phi} e^{-t\alpha(a)}x_\alpha$.*

9. DIAGRAMAS DE DYNKIN: CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE RAÍCES

{Dynkin}

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita con un producto interno $(,)$. Para $u, v \in V$ definimos

$$\langle u, v \rangle = 2 \frac{(u, v)}{(v, v)}.$$

Recordar de la figura 6 que $\langle u, v \rangle/2$ es la proporción en v de la proyección ortogonal de u sobre $\mathbb{R}v$, y que la simetría axial respecto de v^\perp no es más que

$$r_v(u) = u - \langle u, v \rangle v.$$

Definición. Un subconjunto finito $0 \notin \Phi \subset V$ es un *sistema de raíces* de V si:

- Φ genera V ,
- para todos $\alpha, \beta \in \Phi$ se tiene $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$,
- para toda $\alpha \in \Phi$ la simetría axial r_α preserva Φ .

Los elementos de un tal Φ son llamados *raíces*.

El objetivo de esta sección es explicar brevemente la clasificación de los sistemas de raíces y probar ciertas propiedades básicas del *grupo de Weyl* de Φ , es decir el grupo generado por

$$\{r_\alpha : \alpha \in \Phi\},$$

que nos permitieron en el párrafo 8.4 identificar el grupo de Weyl de un espacio simétrico de tipo no-compacto con el de su sistema de raíces restringidas.

La clasificación de los sistemas de raíces pasa por entender primero aquellos sistemas llamados *reducidos*. Una raíz α es *reducida* si $(1/2)\alpha \notin \Phi$. En este caso, tenemos que $c\alpha \in \Phi$ (para algún $c \in \mathbb{R}$) implica $c \in \{\pm 1, \pm 2\}$: en efecto,

$$2c = \langle c\alpha, \alpha \rangle \in \mathbb{Z} \text{ y } 2/c = \langle \alpha, c\alpha \rangle \in \mathbb{Z}.$$

Un sistema de raíces es *reducido* si toda raíz es reducida.

{ángulos}

9.1. 2 raíces: posibles ángulos y la cuerda que determinan. El hecho que para todas $\alpha, \beta \in \Phi$ se tenga $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$ limita enormemente las posibilidades para las posiciones relativas entre α y β . De hecho, recordemos que

$$\cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha||\beta|}$$

de donde deducimos $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4 \cos^2 \angle(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}$. Como $\cos^2 \angle(\alpha, \beta) \in [0, 1]$ tenemos que si α y β no son proporcionales entonces $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle \in \{0, 1, 2, 3\}$ de donde se obtiene la siguiente tabla de posibilidades:

$\langle \alpha, \beta \rangle$	$\langle \beta, \alpha \rangle$	$\angle(\alpha, \beta)$	$ \beta ^2/ \alpha ^2$
0	0	$\pi/2$	depende del caso
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

CUADRO 1. Posibilidades cuando α y β no son proporcionales

{tab:tata}

El siguiente lema que se deduce del cuadro (1). Recordamos que, por definición, para todos $\alpha, \beta \in \Phi$ se tiene $\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha \in \Phi$.

Lema. Sean $\alpha, \beta \in \Phi$ no proporcionales, si $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$ entonces $\alpha - \beta \in \Phi$.

Demostración. Si $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$ entonces de la tabla se deduce que ya sea $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$, de donde $\beta - \alpha \in \Phi$ y por lo tanto $\alpha - \beta \in \Phi$; o $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$ de donde $\alpha - \beta \in \Phi$. \square

La siguiente propiedad jugará un papel esencial. Dadas dos raíces no proporcionales α y β la α -cuerda por β son las raíces de la forma

$$\beta + i\alpha \quad (i \in \mathbb{Z}).$$

Observación. Existe un intervalo $[-r, q]$ en \mathbb{Z} tal que la α -cuerda por β es de la forma

$$\beta + i\alpha \quad \forall i \in [-r, q].$$

Se tiene además $q - r = \langle \beta, \alpha \rangle$.

Demostración. Probamos primero que los $i \in \mathbb{Z}$ tales que $\beta + i\alpha \in \Phi$ es un intervalo de \mathbb{Z} . En efecto, de no ser así tenemos $p < s$ tales que

$$\beta + p\alpha \in \Phi, \quad \beta + (p+1)\alpha \notin \Phi$$

y

$$\beta + (s-1)\alpha \notin \Phi, \quad \beta + s\alpha \in \Phi.$$

Aplicando el Lema tenemos que

$$(\beta + p\alpha, -\alpha) \leq 0 \quad \text{y} \quad (\beta + s\alpha, \alpha) \leq 0,$$

de donde concluimos $p \geq -\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \geq s$, que es una contradicción.

Si $[-r, q]$ es el intervalo en cuestión, entonces es claro que la simetría axial r_α manda $\beta - r\alpha$ en $\beta + q\alpha$, es decir que $-r - \langle \beta, \alpha \rangle = q$. \square

{raicesSimples}

9.2. Raíces simples y cámaras de Weyl. Como Φ es finito, el conjunto

$$\bigcup_{\alpha \in \Phi} \alpha^\perp$$

es una unión finita de hiperplanos y tiene por lo tanto interior vacío. Consideramos un elemento $\theta \in \mathcal{V}$ fuera de esta unión, es decir tal que $\langle \alpha, \theta \rangle \neq 0$ para todo $\alpha \in \Phi$. Consideramos entonces el conjunto

$$\Phi^+(\theta) = \{\alpha \in \Phi : \langle \alpha, \theta \rangle > 0\}$$

y observamos que $\Phi = \Phi^+(\theta) \cup -\Phi^+(\theta)$. Decimos que $\alpha \in \Phi^+(\theta)$ es *descomponible* si $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ con $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\theta)$ e *indescomponible* si no es descomponible. Consideramos finalmente el conjunto

$$\Delta(\theta) = \{\text{elementos indescomponibles de } \Phi^+(\theta)\}.$$

En este párrafo probamos el siguiente teorema, cuya prueba se encuentra en Humphreys [5, 10.1]

Teorema. El conjunto $\Delta(\theta)$ es una base de \mathcal{V} y todo elemento de Φ se escribe como combinación de elementos de $\Delta(\theta)$ con coeficientes en \mathbb{Z} , donde todos los coeficientes tienen el mismo signo.

Demostración. Que todo elemento de $\Phi^+(\theta)$ se puede escribir como combinación lineal con coeficientes en $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ de elementos indecomponibles es tautológico, además

$$\Phi = \Phi^+(\theta) \cup -\Phi^+(\theta).$$

Lo sutil es ver que ésta combinación lineal es única.

Para ver que $\Delta(\theta)$ es linealmente independiente comenzamos por observar que para todos $\alpha \neq \beta \in \Delta(\theta)$ se tiene $(\alpha, \beta) \leq 0$: de no ser así, es decir, si $(\alpha, \beta) > 0$, aplicamos el Lema de 9.1 para obtener que $\alpha - \beta \in \Phi$. Pero entonces alguno entre $\alpha - \beta$ o $\beta - \alpha$ pertenece a $\Phi^+(\theta)$ de donde o α ó β no era indecomponible. La prueba termina aplicando la siguiente proposición al conjunto $\Delta(\theta)$. \square

Proposición. *Sea V un espacio vectorial real con un producto interno (\cdot, \cdot) y sea Π un subconjunto de V tal que:*

- todos los elementos de Π se encuentran del mismo lado de un hiperplano (i.e. existe $u_0 \in V$ con $(v, u_0) > 0$ para todo $v \in \Pi$),
- todo par de elementos de Π forman ángulo obtuso, es decir, para todos $v, w \in \Pi$ vale $(v, w) \leq 0$.

Entonces Π es linealmente independiente.

Demostración. Consideramos una combinación lineal de elementos de Π con $0 = \sum_{v \in \Pi} r_v v$. Separamos los r_v positivos por un lado y los negativos por otro para obtener una igualdad

$$\varepsilon := \sum_{v \in \Delta} s_v v = \sum_{w \in \Delta'} t_w w$$

donde $s_v \geq 0 \forall v \in \Delta$, $t_w \geq 0 \forall w \in \Delta'$ y los subconjuntos Δ y Δ' de Π son disjuntos.

Calculamos entonces la norma de ε y obtenemos

$$(\varepsilon, \varepsilon) = \sum s_v t_w (v, w) \leq 0$$

porque los coeficientes son positivos, $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$ y todo par de elementos de Π forman ángulo obtuso. De donde concluimos que $\varepsilon = 0$.

Obtenemos entonces que

$$0 = (\varepsilon, u_0) = \sum_{v \in \Delta} s_v (v, u_0) \geq 0,$$

por hipótesis (todos los elementos de Π están del lado de u_0 respecto del hiperplano u_0^\perp). Se deduce que $s_v = 0$ para todo $v \in \Delta$ y análogamente $t_w = 0$ para todo $w \in \Delta'$, lo que concluye la demostración. \square

El conjunto $\Delta(\theta)$ solo depende de la componente conexa de

$$V - \bigcup_{\alpha \in \Phi} \alpha^\perp$$

donde θ se encuentre. Un tal componente conexa es llamada una *cámara de Weyl* de (V, Φ) y $\Delta := \Delta(\theta)$ es *el conjunto de raíces simples* asociado a la elección de esa cámara.

Terminamos con la siguiente observación.

Observación. Toda raíz reducida $\alpha \in \Phi$ pertenece a una base $\Delta(\theta)$ para algún θ .

Demostración. De hecho alcanza con tomar θ suficientemente cerca de α^\perp y lejos de $\{\beta^\perp : \beta \in \Phi - \{\alpha\}\}$ para que para toda raíz β con $(\beta, \theta) > 0$ se tenga $(\beta, \theta) > (\alpha, \theta) > 0$. \square

9.3. Diagramas de Dynkin. Consideramos ahora un sistema de raíces *reducido*. El diagrama de Dynkin de un tal sistema es un grafo que se define como sigue. Comenzamos por elegir un sistema de raíces simples Δ de Φ , entonces:

- los vértices del diagrama son los elementos de Δ ,
- dados $\alpha \neq \beta \in \Delta$ ponemos tantas aristas como $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle$ (este número es siempre 0, 1, 2 o 3),
- si $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle \neq 1$ entonces alguna de las dos raíces es mas grande que la otra, ponemos una flecha que apunte a la raíz más corta.

A modo de ejemplo, listamos todos los posibles diagramas con $\dim V = 2$:

$$\begin{array}{ll} A_1 \times A_1 & \circ \quad \circ \\ A_2 & \circ \text{---} \circ \\ B_2 & \circ \rightleftarrows \circ \\ G_2 & \circ \rightleftarrows \circ \end{array}$$

En rango 2, la dirección de la flecha en $\circ \rightleftarrows \circ$ es irrelevante, sin embargo en general los diagramas $B_n = \circ \text{---} \circ \text{---} \cdots \text{---} \circ \rightleftarrows \circ$ y $C_n = \circ \text{---} \circ \text{---} \cdots \text{---} \circ \leftarrow \circ$ provienen de sistemas de raíces no isomorfos.

El objetivo de este párrafo es explicar un algoritmo que permite recuperar Φ a partir de su diagrama de Dynkin. Precisamos el corolario que sigue al lema.

Lema. Si $\alpha \in \Phi^+$ no es simple entonces existe $\beta \in \Delta$ tal que $\alpha - \beta \in \Phi^+$.

Demostración. Observamos primero que si para todo $\sigma \in \Delta$ se tiene $\langle \alpha, \sigma \rangle \leq 0$ entonces el conjunto $\Delta \cup \{\alpha\}$ está en las hipótesis de la Proposición de 9.2. Como Δ es una base, concluimos que existe $\beta \in \Delta$ con $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$ de donde $\alpha - \beta \in \Phi$ (Lema de 9.1). Para ver que $\alpha - \beta \in \Phi^+$ escribimos $\alpha = \sum_{\sigma \in \Delta} k_\sigma \sigma$ con $k_\sigma \geq 0$ y $k_\sigma > 0$ para algún $\sigma \in \Delta$. La raíz $\alpha - \beta$ se escribe entonces como combinación de elementos de Δ donde algún coeficiente es > 0 , esto implica que todos los coeficientes son entonces ≥ 0 (Teorema en 9.2) y $\alpha - \beta \in \Phi^+$. \square

Corolario. Toda $\alpha \in \Phi^+$ se escribe como suma de elementos de Δ (posiblemente con repeticiones) $\alpha = \sigma_1 + \cdots + \sigma_k$ tal que para todo $j \in [1, k]$ las sumas parciales

$$\sigma_1 + \cdots + \sigma_j \in \Phi^+.$$

Si $\alpha \in \Phi^+$ se escribe como $\sum_{\sigma \in \Delta} k_\sigma \sigma$ entonces definimos su *altura* como $\sum_{\sigma \in \Delta} k_\sigma$. El corolario se prueba inmediatamente del lema haciendo inducción en la altura de α .

Proposición. El diagrama de Dynkin de Φ determina Φ .

Demostración. En efecto, tenemos un algoritmo para recuperar Φ a partir de su diagrama de Dynkin. Este consiste en construir las raíces de altura h una vez conocidas las raíces de altura $\leq h - 1$.

Una vez obtenida una raíz $\beta \in \Phi^+$ de altura $h - 1$, queremos saber para cuales $\sigma \in \Delta$ se tiene que $\beta + \sigma$ es una raíz.

Tenemos entonces que calcular $\langle \beta, \sigma \rangle$ y el r de la σ -cuerda para obtener

$$q = r - \langle \beta, \sigma \rangle$$

(párrafo 9.1), si $q \geq 1$ entonces $\beta + \sigma \in \Phi$, si $q = 0$ no.

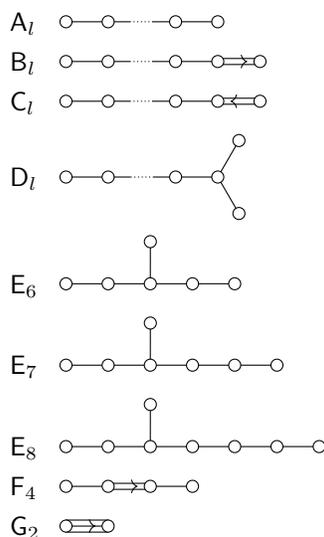
Observamos además que $\langle \beta, \sigma \rangle$ es lineal en β , es decir que si escribimos β como combinación lineal de elementos de Δ vemos que $\langle \beta, \sigma \rangle$ se lee del diagrama de Dynkin.

Más aún, como conocemos todas las raíces de altura $\leq h - 1$, podemos sin problemas identificar el r de la σ -cuerda por β . Esto nos permite calcular el q y decidir si $\beta + \sigma$ pertenece a Φ o no.

El corolario asegura que con este proceso obtendremos todos los elementos de Φ^+ , y $\Phi = \Phi^+ \cup -\Phi^+$. □

{clasifDynkin}

9.4. Clasificación de los diagramas de Dynkin. Las únicas posibilidades para diagramas de Dynkin conexos son:



Demostración. La prueba de Humphreys [5, 11.4] no tiene mas pre-requisitos que los presentados en esta sección. □

{weylR}

9.5. El grupo de Weyl de Φ . El *grupo de Weyl* $\mathcal{W}(\Phi)$ del sistema Φ es el grupo generado por las simetrías axiales $r_\alpha : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ respecto de α^\perp ,

$$r_\alpha(v) = v - \langle v, \alpha \rangle \alpha.$$

El objetivo de este párrafo es mostrar el siguiente teorema, necesario en el párrafo 8.4, identificando el grupo de Weyl $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ con el grupo de Weyl del sistema de raíces asociado a $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$.

Teorema. *El grupo $\mathcal{W}(\Phi)$ es generado por $\{r_\sigma : \sigma \in \Delta\}$ y actúa simplemente transitivo en las cámaras de Weyl de Φ .*

Lema.

1. Si $\beta \in \Delta$ entonces r_β preserva $\Phi^+ - \{\beta\}$.
2. Sean $\sigma_1, \dots, \sigma_t$ raíces simples, no necesariamente distintas. Escribimos $r_i = r_{\sigma_i}$ y supongamos que $r_1 \cdots r_{t-1}(\sigma_t) \in -\Phi^+$, entonces existe s tal que

$$r_1 \cdots r_t = r_1 \cdots r_{s-1} r_{s+1} \cdots r_{t-1}.$$

Demostración. Si $\alpha \in \Phi^+ - \{\beta\}$ entonces $\alpha = \sum_{\sigma \in \Delta} k_\sigma \sigma$ con k_σ enteros no negativos y $k_{\sigma'} \neq 0$ para alguna $\sigma' \in \Delta - \{\beta\}$. Tenemos entonces

$$r_\beta(\alpha) = \alpha - \langle \alpha, \beta \rangle \beta = (k_\beta - \langle \alpha, \beta \rangle) \beta + \sum_{\sigma \in \Delta - \{\beta\}} k_\sigma \sigma.$$

Tenemos entonces que $r_\beta(\alpha)$ es una raíz con un coeficiente positivo en Δ , a saber $k_{\sigma'}$, esto implica que $r_\beta(\alpha) \in \Phi^+$.

Sean $\beta_i = r_{i+1} \cdots r_{t-1}(\alpha_t)$ y s el primer índice tal que $\beta_s \in \Phi^+$ y $\beta_{s-1} \in -\Phi^+$. Del ítem 1 tenemos que necesariamente $\beta_s = \alpha_s$. Tenemos entonces, como en general se tiene $r_{f(a)} = f r_a f^{-1}$, que

$$r_s = r_{\alpha_s} = r_{r_{s+1} \cdots r_{t-1}(\alpha_t)} = (r_{s+1} \cdots r_{t-1}) r_t (r_{s+1} \cdots r_{t-1})^{-1}.$$

Concluimos que $r_1 \cdots r_t = r_1 \cdots r_{s-1} r_{s+1} \cdots r_{t-1}$. \square

$$\text{Sea } \delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha.$$

Corolario. Para toda $\sigma \in \Delta$ vale $r_\sigma(\delta) = \delta - \sigma$.

Demostración. Sale directo del ítem 1 del lema. \square

Prueba del Teorema. Sea \mathcal{W}' el grupo generado por las reflexiones $\{r_\sigma : \sigma \in \Delta\}$. Este grupo actúa en las cámaras de Weyl y queremos probar que si γ pertenece al interior de una cámara, entonces existe $r \in \mathcal{W}'$ tal que $r(\gamma) \in V^+$. Consideramos r que maximize (en \mathcal{W}') el producto interno $(r(\gamma), \delta)$. Para toda $\sigma \in \Delta$ tenemos entonces

$$(r(\gamma), \delta) \geq (r_\sigma r(\gamma), \delta) = (r(\gamma), r_\sigma(\delta)) = (r(\gamma), \delta - \sigma),$$

de donde $(r(\gamma), \sigma) \geq 0$. Como \mathcal{W}' manda cámaras en cámaras, tenemos $r(\gamma) \in V^+$.

Para probar que $\mathcal{W}' = \mathcal{W}(\Phi)$ recordamos que toda raíz $\alpha \in \Phi$ pertenece a una base $\Delta(\theta)$ (observación del párrafo 9.2). Como \mathcal{W}' actúa transitivamente en las cámaras, actúa transitivamente en las bases, de donde existen $\sigma \in \Delta$ y $r \in \mathcal{W}'$ tal que $r(\sigma) = \alpha$. La reflexión

$$r_\alpha = r r_\sigma r^{-1} \in \mathcal{W}'.$$

Consecuentemente $\mathcal{W}(\Phi) \subset \mathcal{W}'$.

Finalmente, sea entonces $r \in \mathcal{W}(\Phi)$ tal que $r(V^+) = V^+$, queremos probar que $r = \text{id}$. Preservar la cámara V^+ es equivalente a $r(\Delta) = \Delta$. Escribimos entonces r como una palabra reducida $r = r_1 \cdots r_t$, con $r_i = r_{\sigma_i}$ para alguna $\sigma_i \in \Delta$. Tenemos que $r_1 \cdots r_t(\sigma_t) = -r_1 \cdots r_{t-1}(\sigma_t) \in \Delta \subset \Phi^+$, es decir que $r_1 \cdots r_{t-1}(\sigma_t) \in -\Phi^+$. El ítem 2 del Lema implica entonces que la palabra $r_1 \cdots r_t$ no es reducida. Consecuentemente $r = \text{id}$. \square

9.6. Sistemas de raíces no reducidos. Resulta que además de los sistemas de raíces reducidos, solo aparece otra posibilidad (para todo $l \geq 1$): el sistema llamado $(BC)_l$, que resulta de la unión de B_l y C_l . El espacio total es $V = \mathbb{R}^l$ y las raíces son

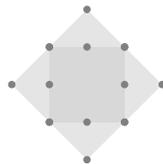
$$\{\pm e_i \pm e_j : i, j \in \llbracket 1, l \rrbracket, i \neq j\} \cup \{e_i : i \in \llbracket 1, l \rrbracket\} \cup \{2e_i : i \in \llbracket 1, l \rrbracket\},$$

donde denotamos $\{e_i : i \in \llbracket 1, l \rrbracket\}$ la base canónica de \mathbb{R}^l .

Para clasificar los sistemas de raíces no reducidos usamos el siguiente lema.

Lema. Sea Φ un sistema de raíces, entonces:

- el subconjunto de raíces reducidas Φ_s es un sistema de raíces reducido,

FIGURA 8. El sistema $(BC)_2$

- el subconjunto Φ_l de raíces $\alpha \in \Phi$ tales que $2\alpha \notin \Phi$ es también un sistema de raíces reducido.

El grupo de Weyl de los tres sistemas es el mismo.

Demostración. Elemental de la definición. \square

Proposición. *Módulo isomorfismos, el único sistema irreducible de raíces no reducido es, para cada $l \in \mathbb{N}$, $(BC)_l$.*

Demostración. Es claro el sistema Φ_s del Lema es irreducible. Sea $\alpha \in \Phi$ tal que $2\alpha \in \Phi$. Recordemos de 9.2 que existe un sistema de raíces simples Δ tal que $\alpha \in \Delta$. El conjunto Δ es también un sistema de raíces simples para Φ_s . Sea entonces $\beta \in \Delta$ con $\langle \beta, \alpha \rangle \neq 0$, entonces $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ y $\langle \beta, 2\alpha \rangle = (1/2)\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$, como además $|\langle \beta, \alpha \rangle| \in \{1, 2, 3\}$ concluimos que

$$\langle \beta, \alpha \rangle = -2.$$

Como esta igualdad vale para cualquier raíz simple no ortogonal a α , tenemos, mirando la lista del párrafo 9.4 que Φ_s es tipo B_l y que α es la raíz más corta de Δ_s . Como el grupo de Weyl actúa transitivamente en las cámaras, vemos que toda otra raíz $\sigma \in \Phi$ tal que $2\sigma \in \Phi$ está en la órbita $\mathcal{W}(\Phi)\alpha$. \square

Esta prueba la sacamos de Knapp [6, II.8].

10. TODA ÁLGEBRA DE LIE SIMPLE NO-COMPACTA ADMITE UNA INVOLUCIÓN DE CARTAN

{invoSec}

Explicamos en esta sección una prueba de Donaldson [3] del enunciado en el título.

{invoCartan}

Theorem 10.1. *Sea $\rho : \mathrm{SL}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{SL}(V, \mathbb{R})$ una representación irreducible. Para $v \in V$ sea G_v la componente conexa de la identidad del estabilizador de v en $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$. Si asumimos que G_v actúa irreductiblemente en \mathbb{R}^d , entonces existe $p \in \mathcal{X}_d$ tal que:*

- G_v es invariante por la involución $\tau^p(g) = (g^{*p})^{-1}$,
- todo grupo compacto de G_v es conjugado a un subgrupo de $G_v \cap K^p$.

Observamos rápidamente como el resultado implica el título de la sección:

Corolario. *Toda álgebra de Lie real simple no compacta \mathfrak{g} admite una involución de Cartan.*

Demostración. Consideramos la acción de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ en el espacio de aplicaciones bilineales $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, es decir en $(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^* \otimes \mathfrak{g}$. Observamos que el corchete $[\cdot, \cdot]$ de \mathfrak{g} es un elemento de este espacio, cuyo estabilizador es el grupo de automorfismos de \mathfrak{g}

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \left\{ g \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) : g[g^{-1}x, g^{-1}y] = [x, y] \right\}.$$

El álgebra de Lie de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ es $\partial\mathfrak{g}$ que, gracias a A.6, coincide con $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ dado que \mathfrak{g} es (semi-)simple. La componente conexa $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ coincide con $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, que actúa irreductiblemente en \mathfrak{g} por ser \mathfrak{g} simple. \square

{ptoCritico}

10.1. Funciones convexas en \mathcal{X}_d . Decimos que una aplicación $f : \mathcal{X}_d \rightarrow \mathbb{R}$ es *convexa* si lo es a lo largo de geodésicas, es decir, si $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}_d$ es una geodésica entonces $f \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa. En esta sección mostramos el resultado siguiente.

Theorem 10.2. *Sea $f : \mathcal{X}_d \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable convexa invariante por un subgrupo G de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$, si G actúa irreducible en \mathbb{R}^d entonces f tiene un mínimo en \mathcal{X}_d . En este caso, si $H \subset G$ es un subgrupo compacto, entonces existe $p \in \mathcal{X}_d$ fijo por H y mínimo f .*

Lema. *Sean $f : \mathcal{X}_d \rightarrow \mathbb{R}$ una función regular convexa y ϕ_t el flujo en \mathcal{X}_d asociado al campo $-\mathrm{grad}f$. Entonces para todos $x, y, \in \mathcal{X}_d$ la aplicación $t \mapsto d(\phi_t x, \phi_t y)$ es decreciente, (en el intervalo de tiempo donde esté definida).*

Demostración. Calculamos la derivada de la aplicación en cuestión en un t_0 dado del dominio de definición. Con este fin, escribimos $a = d(\phi_{t_0} x, \phi_{t_0} y)$ y consideramos, para $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, el segmento geodésico $\gamma_t : [0, a] \rightarrow \mathcal{X}_d$ de $\phi_t x$ a $\phi_t(y)$. Observar que $\gamma_{t_0} = \gamma$ esta parametrizada con velocidad de norma 1. Por regularidad respecto de condiciones iniciales, la aplicación $f(t, s) = \gamma_t(s)$ es diferenciable. Consideramos los campos

$$X(t, s) = d_{(t,s)} f(\partial/\partial t) \quad \text{e} \quad Y(t, s) = d_{t,s} f(\partial/\partial s).$$

Por definición tenemos que:

- $d(\phi_t(x), \phi_t(y)) = \int_0^a \|Y(t, s)\| ds$,
- $[X, Y] = 0$,
- $\nabla_Y Y = 0$, por ser γ_t geodésica para todo t ,
- $X(t, 0) = -\mathrm{grad}_{\phi_t(x)} f$ y $X(t, a) = -\mathrm{grad}_{\phi_t(y)} f$.

Calculamos entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t_0} \int_0^a \|Y(t, s)\| ds &= \int_0^a \frac{1}{2\|Y(t_0, s)\|} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t_0} \langle Y(t, s), Y(t, s) \rangle ds \\
&= \int_0^a \langle \nabla_X Y, Y \rangle ds && \text{(def. de } X) \\
&= \int_0^a \langle \nabla_Y X, Y \rangle ds && \text{(simetría de } \nabla) \\
&= \int_0^a \frac{\partial}{\partial s} \langle X, Y \rangle ds && (\nabla_Y Y = 0) \\
&= \langle \text{grad}_{\phi_{t_0}(x)} f, \dot{\gamma}(0) \rangle - \langle \text{grad}_{\phi_{t_0}(y)} f, \dot{\gamma}(a) \rangle.
\end{aligned}$$

Finalmente observamos que, por convexidad de f , la derivada de $s \mapsto f(\gamma(s))$ es creciente, de donde

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t_0} d(\phi_t(x), \phi_t(y)) = \langle \text{grad}_{\phi_{t_0}(x)} f, \dot{\gamma}(0) \rangle - \langle \text{grad}_{\phi_{t_0}(y)} f, \dot{\gamma}(a) \rangle \leq 0,$$

como buscado. \square

Prueba del Teorema. Comenzamos por observar que para $t \leq s$ la norma

$$\|\text{grad}_{\phi_t x} f\| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} d(\phi_t x, \phi_{t+h} x) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} d(\phi_s x, \phi_{s+h} x) = \|\text{grad}_{\phi_s x} f\|,$$

de donde deducimos que el flujo (ϕ_t) está definido para todo tiempo positivo.

Si para algún x la órbita $\phi_t x$ se queda en un compacto de X_d , entonces cualquier punto de acumulación de $\phi_t x$ es un mínimo de f . Por otro lado, si para algún x se tiene una sucesión de tiempos $t_i \rightarrow \infty$ con $\phi_{t_i} x \rightarrow \infty$, entonces para todo i y $g \in G$ la distancia

$$d(\phi_{t_i} x, g(\phi_{t_i} x)) = d(\phi_{t_i} x, \phi_{t_i}(gx)) \leq d(x, gx) < K,$$

porque f es G -invariante. Cualquier punto de acumulación de $\{\phi_{t_i} x\}_i$ en el borde visual $\partial_\infty X_d$ es entonces un punto fijo global de G , lo que resulta (ver párrafo 3.8) en un subespacio de \mathbb{R}^d G -invariante. Por irreducibilidad, este tal no espacio no existe y por ende f tiene un mínimo.

Para terminar, sea $H \subset G$ un subgrupo compacto y $p \in X_d$ un punto fijo por H (recordar párrafo 5.5). Como f es convexa, el conjunto de puntos \mathcal{M} donde f realiza el mínimo es un conjunto convexo cerrado de X_d . Como X_d tiene curvatura no-positiva, existe un único punto $p_0 \in \mathcal{M}$ que realiza la distancia $d(p, \mathcal{M})$, este punto es entonces fijo por H , lo que termina la prueba. \square

10.2. Prueba del Teorema 10.1.

Observación. Si $w \in \mathbb{R}^k$ entonces la aplicación $X_k \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$o \mapsto \|w\|_o^2$$

es convexa.

Demostración. En efecto, una geodésica de X_d es de la forma $\pi^o(e^{tx})$ con $o \in X_d$ y x diagonalizable en una base o -ortogonal. Escribiendo $w = \sum w_i$ en esta base obtenemos

$$\|w\|_{\pi^o(e^{tx})}^2 = \|e^{-tx} w\|_o^2 = \sum e^{-2t\lambda_i(x)} \|w_i\|_o^2$$

que es convexa en t . \square

Consideramos entonces el encaje totalmente geodésico $\varphi : X_d \rightarrow X_k$, dado por el párrafo 6.6, asociado a la representación $\phi : \mathrm{SL}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{SL}_k(\mathbb{R})$. La aplicación $f : X_d \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(q) = \|w\|_{\varphi(q)}^2$$

es por lo tanto convexa y G_w -invariante. Por el párrafo 10.1, f tiene un mínimo en X_d , fijo por un subgrupo compacto H de G_w dado.

La prueba culmina con la siguiente observación.

Observación. Si $p \in X_d$ es un punto crítico de f entonces \mathfrak{g}_w es invariante por *p

Demostración. Observamos que, por definición de φ se tiene que para toda $x \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$ vale

$$d_{\mathrm{id}}\phi(x^{*p}) = (d_{\mathrm{id}}\phi(x))^{*\varphi(p)}.$$

Como p es crítico para f se tiene que para todo $x \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$ vale $\langle d_{\mathrm{id}}\phi(x)w, w \rangle_{\varphi(p)} = 0$, considerando $x = [y, y^{*p}]$ obtenemos

$$0 = \|d_{\mathrm{id}}\phi(y^{*p})w\|^2 - \|d_{\mathrm{id}}\phi(y)w\|^2.$$

El álgebra \mathfrak{g}_w es, por definición, aquellos $y \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$ con $d_{\mathrm{id}}\phi(y)w = 0$. Tenemos entonces que $y \in \mathfrak{g}_w$ implica $y^{*p} \in \mathfrak{g}_w$. \square

APÉNDICE A. ALGUNOS CONCEPTOS USADOS

{Adad}

A.1. Adjunta, representación. Si G es un grupo de Lie entonces notamos por $\mathfrak{g} = \mathbb{T}_e G$ el espacio tangente a la identidad. Para $g \in G$ consideramos las aplicaciones *multiplicar a izquierda* y *a derecha* $L_g, R_g : G \rightarrow G$ definidas como

$$\begin{aligned} L_g(h) &= gh \\ R_g(h) &= hg. \end{aligned}$$

la aplicación *conjugar por g* $\phi_g : G \rightarrow G; h \mapsto ghg^{-1} = L_g R_{g^{-1}}(h)$, fija la identidad. La aplicación adjunta $\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ es $\text{Ad}(g) = d_e \phi_g$. El objetivo de este párrafo es describir la diferencial de Ad en e ; $d_e \text{Ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Para $x \in \mathfrak{g}$ definimos el campo invariante a izquierda $X(g) \in \mathbb{T}_g G$ como $X(g) = d_e L_g(x)$. Si $(\psi_t^X : G \rightarrow G)_{t \in \mathbb{R}}$ es el flujo de X entonces para todos $g, h \in G$ y $t \in \mathbb{R}$ vale

$$\begin{aligned} g \cdot \psi_t^X(h) &= \psi_t^X(gh) \\ \psi_t^X(h) &= R_{\psi_t^X(e)}(h), \end{aligned} \tag{21} \quad \{\text{flujo}=\mathbf{R}\}$$

(la segunda ecuación se deduce de la primera).

Si además $y \in \mathfrak{g}$ definimos el *corchete de Lie* como

$$[x, y] := [X, Y](e) \in \mathfrak{g},$$

donde $[X, Y]$ es la derivada de Lie de los campos correspondientes, ver A.11. Definimos además la transformación lineal $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ como $\text{ad}(x)(y) = [x, y]$.

Proposición. Para todos $x, y \in \mathfrak{g}$ vale que $(d_e \text{Ad}(x))(y) = [x, y]$, lo que suele resumirse escribiendo: la derivada de Ad es ad .

Demostración. Se tiene:

$$\begin{aligned} [x, y] &= [X, Y](e) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} d_{\psi_t^X(e)} \psi_{-t}^X \left(Y(\psi_t^X(e)) \right) && \text{(def. A.11)} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} d_{\psi_t^X(e)} \psi_{-t}^X \left(d_e L_{\psi_t^X(e)}(y) \right) && \text{(def. de } Y) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} d_{\psi_t^X(e)} R_{\psi_t^X(e)} \left(d_e L_{\psi_t^X(e)}(y) \right) && \text{(ecuación (21))} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} d_e \phi_{\psi_t^X(e)}(y) && \text{(def. de } \phi_g) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \text{Ad}(\psi_t^X(e))(y) && \text{(def. de Ad)} \\ &= (d_e \text{Ad}(x))(y) && \text{(def. de diferencial).} \end{aligned}$$

□

Corolario. $\text{Ad}(e^{tx})(y) = e^{t \text{ad}_x}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\text{ad}_x)^n y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} [x[x, \dots, [x, y]]]$.

Demostración. Como Ad es un morfismo de grupos, $t \mapsto \text{Ad}(e^{tx})$ es un grupo a un parámetro de $\text{GL}(\mathfrak{g})$ cuya velocidad en 0, según la proposición anterior, es ad_x . □

A.2. $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -asociatividad. Una forma bilineal ω en una álgebra de Lie \mathfrak{g} es $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -asociativa si para todos $x, y, z \in \mathfrak{g}$ se tiene que

$$\omega([x, y], z) = \omega(x, [y, z]).$$

{asociatividad}

{nilpotente}

A.3. Álgebra nilpotente. Para un álgebra de Lie \mathfrak{l} definimos su *serie central descendiente* por inducción: $\mathfrak{l}^0 = \mathfrak{l}$ y $\mathfrak{l}^n = [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}^{n-1}]$. Decimos que \mathfrak{l} es *nilpotente* si para algún n se tiene $\mathfrak{l}^n = \{0\}$.

{cpta}

A.4. Álgebra compacta. Un álgebra de Lie es *compacta* si su forma de Killing (ver A.13) es definida.

{AutDer}

A.5. Automorfismos y derivaciones de \mathfrak{g} . El grupo de automorfismos de \mathfrak{g} se denota

$$\text{Aut}(\mathfrak{g}) = \{T \in \text{GL}(\mathfrak{g}) : T[x, y] = [Tx, Ty]\}.$$

Es un subgrupo cerrado de $\text{GL}(\mathfrak{g})$ y su álgebra de Lie es conocida como *las derivaciones de \mathfrak{g}* : observar que si derivamos la ecuación anterior respecto de T obtenemos

{parge}

$$\partial\mathfrak{g} = \{D \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) : D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy]\}. \quad (22)$$

La identidad de Jacobi implica que $\text{ad}(\mathfrak{g})$ es una subálgebra de $\partial\mathfrak{g}$, esta última considerada con el corchete de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$: $[D, F] = D \circ F - F \circ D$. Más aún: si D es una derivación entonces la fórmula

$$D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy]$$

se lee como: para todo $x \in \mathfrak{g}$ vale

{deriva}

$$[D, \text{ad}_x] = D \circ \text{ad}_x - \text{ad}_x \circ D = -\text{ad}_{D(x)}. \quad (23)$$

Concluimos que $\text{ad}(\mathfrak{g})$ es un ideal de $\partial\mathfrak{g}$.

En particular $\text{Int}(\mathfrak{g})$, el subgrupo de *automorfismos internos de \mathfrak{g}* , definido como el subgrupo conexo de $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ de álgebra de Lie $\text{ad}(\mathfrak{g})$, es un subgrupo normal. Es relevante remarcar que $\text{Int}(\mathfrak{g})$ no es necesariamente un subgrupo cerrado de $\text{GL}(\mathfrak{g})$.

{AdCentrág}

A.6. Automorfismos de álgebras semi-simples. En este párrafo demostramos la siguiente proposición. Recordar la definición de $\partial\mathfrak{g}$ de (22) en A.5.

Proposición. *Si \mathfrak{g} es semi-simple entonces $\partial\mathfrak{g} = \text{ad}(\mathfrak{g})$. En particular $\text{Int}(\mathfrak{g})$ coincide con $\text{Aut}(\mathfrak{g})_0$, y es por lo tanto un subgrupo cerrado de $\text{GL}(\mathfrak{g})$.*

Demostración. Consideramos el ortogonal $(\text{ad}(\mathfrak{g}))^{\perp_{\kappa_{\partial\mathfrak{g}}}}$ de $\text{ad}(\mathfrak{g})$ para la forma de Killing de $\partial\mathfrak{g}$. Este es también un ideal de $\partial\mathfrak{g}$.

Como $\text{ad}(\mathfrak{g})$ es un ideal de $\partial\mathfrak{g}$ la forma de Killing $\kappa_{\partial\mathfrak{g}}|_{\text{ad}(\mathfrak{g})} = \kappa_{\text{ad}(\mathfrak{g})}$ que, como \mathfrak{g} es semisimple, no degenera. En particular

{00}

$$(\text{ad}(\mathfrak{g}))^{\perp_{\kappa_{\partial\mathfrak{g}}}} \cap \text{ad}(\mathfrak{g}) = \{0\}, \quad (24)$$

de donde, al ser ambos ideales de $\partial\mathfrak{g}$, se concluye que

$$\left[\text{ad}(\mathfrak{g}), (\text{ad}(\mathfrak{g}))^{\perp_{\kappa_{\partial\mathfrak{g}}}} \right] = 0.$$

Consideramos $D \in (\text{ad}(\mathfrak{g}))^{\perp_{\kappa_{\partial\mathfrak{g}}}}$, la fórmula (23) implica entonces que para todo $x \in \mathfrak{g}$

$$0 = [D, \text{ad}_x] = -\text{ad}_{Dx},$$

es decir que para todo $y \in \mathfrak{g}$ vale que $[Dx, y] = 0$. Concluimos que para todo $x \in \mathfrak{g}$ se tiene $Dx \in Z(\mathfrak{g}) \subset \text{Rad } \kappa_{\mathfrak{g}} = \{0\}$. Es decir, $D \equiv 0$ y $(\text{ad}(\mathfrak{g}))^{\perp \kappa_{\partial \mathfrak{g}}} = \{0\}$. Esto último implica en particular que $\text{Rad}_{\partial \mathfrak{g}} = \{0\}$, y junto con la ecuación (24) termina la prueba. \square

Se obtiene entonces el siguiente útil corolario.

Corolario. *Si G es semi-simple y conexo entonces $\text{Ad}(G) = \text{Int}(\mathfrak{g})$ es un subgrupo cerrado de $\text{GL}(\mathfrak{g})$.*

Demostración. De la proposición se tiene que el grupo $\text{Ad}(G)$ coincide con $\text{Int}(\mathfrak{g})$, que es cerrado. \square

{BV}

A.7. Borde visual. Sea M una variedad de Hadamard, es decir: completa, de curvatura seccional ≤ 0 y contractible. En una tal variedad, las geodésicas están globalmente definidas y son globalmente minimisantes. En efecto, se deduce del Teorema de comparación de Rauch (ver A.21) que si v y w pertenecen a la esfera unidad de p $\mathcal{U}_p M = \{u \in \mathcal{T}_p M : \|u\| = 1\}$ entonces la distancia

$$d(\gamma_v(t), \gamma_w(t)) \rightarrow \infty \quad (25) \quad \{\text{rayos}\}$$

cuando $t \rightarrow \infty$, siendo $\gamma_u : \mathbb{R} \rightarrow M$ la geodésica de velocidad inicial u .

Un *rayo geodésico* es una isometría $r : [0, \infty) \rightarrow M$. Definimos la siguiente relación de equivalencia en el conjunto de rayos geodésicos de M : $r \sim r'$ si la aplicación

$$t \mapsto d(r(t), r'(t))$$

está acotada. Dicho de otra forma, dos rayos son equivalentes si los conjuntos $r[0, \infty)$ y $r'[0, \infty)$ están a distancia de Hausdorff finita (el entorno de radio K de uno contiene al otro y viceversa). La clase de r es momentáneamente denotada por $[r]$ y el espacio de clases es llamado *el borde visual* $\partial_{\infty} M$ de M .

Observación. Para todo $p \in M$ la aplicación $\pi_p : \mathcal{U}_p M \rightarrow \partial_{\infty} M$ dada por $v \mapsto [\gamma_v|_{[0, \infty)}]$ es biyectiva. Si $q \in M$ entonces la composición $\pi_p^{-1} \pi_q : \mathcal{U}_q M \rightarrow \mathcal{U}_p M$ es continua¹.

Demostración. La ecuación (25) muestra la inyectividad. Por otro lado, si r es un rayo geodésico, podemos considerar la sucesión $\{v_n\} \subset \mathcal{U}_p M$ tal que para todo n la geodésica γ_{v_n} contiene a $r(n)$. Si $v \in \mathcal{U}_p M$ es un punto de acumulación de $\{v_n\}$ entonces los rayos $\gamma_v|_{[0, \infty)}$ y r son equivalentes. \square

El borde visual $\partial_{\infty} M$ tiene entonces una topología natural que hace de la aplicación π_p un homeomorfismo. La unión disjunta $M \sqcup \partial_{\infty} M$ tiene también una topología, definida tal que si $x_n \in M$ tiende a infinito (i.e. sale de cualquier compacto de M) entonces sus puntos de acumulación en $\partial_{\infty} M$ se obtienen como sigue: fijamos un punto arbitrario $p \in M$ y consideramos segmentos geodésicos γ_{v_n} de p a x_n (con $v_n \in \mathcal{U}_p M$), consideramos los puntos de acumulación de $\{v_n\}$ en $\mathcal{U}_p M$ y los proyectamos a $\partial_{\infty} M$ via π_p . Por esta razón se escribe $[r] = r(\infty)$.

¹(de hecho Hölder-continua)

{centro}

A.8. Centro. Si H es un grupo, su *centro* es el subgrupo de aquellos elementos que conmutan con todos los elementos de H ,

$$Z(H) = \{g \in H : gh = hg \forall h \in H\}.$$

Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie, su *centro* es la subálgebra abeliana $Z(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} : [x, y] = 0 \forall y \in \mathfrak{g}\}$.

Observación. Si H es un grupo de Lie tal que $Z(\mathfrak{h}) = \{0\}$ entonces $\text{Ad} : H \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{h})$ es un cubrimiento sobre su imagen.

{cubrimiento}

A.9. Cubrimiento universal de un grupo topológico. Sea G un grupo topológico metrizable, en esta subsección explicamos brevemente el siguiente resultado.

Proposición. *El cubrimiento universal \mathbf{G} de G es un grupo topológico, la proyección natural $\pi : \mathbf{G} \rightarrow G$ es un morfismo de grupos cuyo núcleo está contenido en el centro $Z(\mathbf{G})$.*

En particular, el grupo fundamental de un grupo topológico métrizable es abeliano.

Demostración. Comenzamos por recordar la definición de cubrimiento universal: un elemento de \mathbf{G} es un camino en G , basado en e , módulo homotopías a extremos fijos. Es decir,

$$\mathbf{G} = \{x : [0, 1] \rightarrow G \text{ continuo con } x(0) = e\} / \sim$$

donde $x \sim y$ si $x(1) = y(1)$ y x es homotópico a y fijando los extremos. La proyección $\pi : \mathbf{G} \rightarrow G$ es, por definición, $\pi(x) = x(1)$. Notamos $[x]$ la clase del camino x .

La operación de \mathbf{G} se define como $[x][y] = [x * x(1)y]$, donde $*$ denota la *concatenación* de caminos. Observar que en efecto \mathbf{G} es un grupo, de identidad el camino homotópicamente trivial en G y que, para $[x] \in \mathbf{G}$, su inversa es

$$[x]^{-1} = [x(1)^{-1}\bar{x}]$$

donde \bar{x} es el camino x recorrido al revés.

La proyección π es claramente un morfismo dado que el camino $x * x(1)y$ tiene a $x(1)y(1)$ por punto final.

Sean $[x]$ en el núcleo de π , y sea $[y] \in \mathbf{G}$ un elemento arbitrario. Para mostrar que $[y][x][y]^{-1} = [x]$ escribimos la definición de $[y][x][y]^{-1}$:

$$\begin{aligned} [y][x][y]^{-1} &= [y][x][y(1)^{-1}\bar{y}] \\ &= [y * y(1)x * y(1)y(1)^{-1}\bar{y}] \quad (\text{porque } x(1) = e). \\ &= [y * y(1)x * \bar{y}]. \end{aligned}$$

Para mostrar que el camino $y * y(1)x * \bar{y}$ es homotópico a x alcanza con usar la homotopía $t \mapsto y|[0, t] * y(t)x * y|[0, t]$. \square

A.10. Derivación de \mathfrak{g} . Ver [A.5](#).

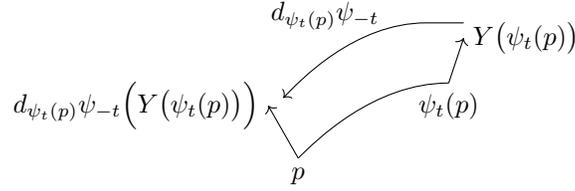


FIGURA 9. El vector de T_pM de la ecuación (26)

{figEsto}

{derivadaLie}

A.11. Derivada de Lie. Consideramos una variedad M y X un campo diferenciable en M de flujo $(\psi_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Si Y es un campo en M , entonces para todo $p \in M$ se tiene que

{esto}
$$t \mapsto d_{\psi_t p} \psi_{-t} \left(Y(\psi_t(p)) \right) \tag{26}$$

es una curva diferenciable de vectores en T_pM , ver la figura 9. Podemos entonces tomar su derivada, que llamamos la *derivada de Lie* de Y en la dirección de X , también conocida como *corchete de Lie*:

$$[X, Y](p) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} d_{\psi_t p} \psi_{-t} \left(Y(\psi_t(p)) \right).$$

A.12. Exponencial en grupos de Lie. Ver también A.1. La *exponencial* de G se define como $e^{\cdot} : \mathfrak{g} \rightarrow G$

$$e^x = \psi_1^X(e),$$

donde $(\psi_t^X : G \rightarrow G)_{t \in \mathbb{R}}$ es el flujo del campo invariante a izquierda $X(g) = d_e L_g(x)$.

A.13. Forma de Killing. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo \mathbb{k} . La *forma de Killing* de \mathfrak{g} es la forma bilineal $\kappa_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{k}$ definida como

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = \text{traza}(\text{ad}_x \circ \text{ad}_y) = \text{traza} \left(z \mapsto [x, [y, z]] \right).$$

Se verifican rápidamente varias propiedades:

- es simétrica, (recordar $\text{traza}(AB) = \text{traza}(BA)$).
- es $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -asociativa: se puede hacer la cuenta directa o, para $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, se puede usar el siguiente hecho que es interesante en sí mismo: si G es un grupo de álgebra de Lie \mathfrak{g} , entonces $\kappa_{\mathfrak{g}}$ es $\text{Ad}(G)$ -invariante.
- si \mathfrak{J} es un ideal de \mathfrak{g} entonces $\kappa_{\mathfrak{J}} = \kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{J}}$: recordar que si T es un mapa lineal de un espacio en sí mismo, entonces su traza coincide con la traza de T restricto a su imagen.
- si \mathfrak{J} es un ideal de \mathfrak{g} entonces $\mathfrak{J}^{\perp \kappa_{\mathfrak{g}}}$ es también un ideal: se deduce de la $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ asociatividad de $\kappa_{\mathfrak{g}}$.
- si $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un morfismo de álgebras entonces $\kappa_{\phi(\mathfrak{g})} = \kappa_{\mathfrak{g}}$ (la traza es invariante por conjugaciones).
- $Z(\mathfrak{g}) \subset \text{Rad } \kappa_{\mathfrak{g}}$.

A.14. Frobenius, Teorema de.

A.15. Grupo de Weyl de X . Ver párrafo 8.1.1.

{exponencial}

{formaKilling}

{Frob}

{simplementeConexo}

A.16. Grupos de Lie simplemente conexos.

Proposición A.1. *Sea G un grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie \mathfrak{g} . Sea H un grupo de Lie de álgebra de Lie \mathfrak{h} , entonces todo morfismo $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es la diferencial de un morfismo $\rho : G \rightarrow H$.*

{transPar}

A.17. Transporte Paralelo.

Lema. *Si $f : M \rightarrow M$ es una isometría y p, q , pertenecen a un entorno normal de M , entonces $d_q f = P'_t \circ d_p f \circ P_t$.*

{pi1Cociente}

A.18.

Lema. *Sea G simplemente conexo y H un subgrupo cerrado, entonces el cociente G/H es simplemente conexo si y solo si H es conexo.*

Demostración. Una curva cerrada $\alpha : [0, 1] \rightarrow G/H$ con $\alpha(0) = \alpha(1) = [H]$ se levanta a una curva $\tilde{\alpha}$ de G con extremidades $h_0, h_1 \in H$. Si H es conexo existe una curva contenida en H con las mismas extremidades. La curva obtenida al concatenar $\tilde{\alpha}$ con ésta es homotópicamente trivial por ser G simplemente conexo. Concluimos que $\tilde{\alpha}$ es homotópica a una curva contenida en H , o equivalentemente α es homotópica al punto $[H]$.

Recíprocamente, si H no es conexo, una curva entre dos componentes conexas de H es, en el cociente, una curva cerrada no trivial. \square

A.19. Involución de Cartan. Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie real de forma de Killing κ , una *involución de Cartan* $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ es un morfismo involutivo tal que la forma bilineal simétrica $\kappa^\sigma(x, y) := -\kappa(x, \sigma(y))$ es definida positiva. Ver la sección 8.

{IsomDeter}

A.20. Isometrías quedan determinadas por la imagen de un punto y la diferencial en ese punto.

{Rauch}

A.21. Rauch, Teorema de comparación.

A.22. Subgrupos y subálgebras. El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Teorema de Frobenius A.14.

Proposición A.2. *Sea $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ una subálgebra de Lie, entonces existe un subgrupo de Lie $H \subset GL(\mathfrak{g})$ cuya álgebra de Lie es \mathfrak{h} . Más aún la componente neutra H_{id} queda únicamente determinada por \mathfrak{h} .*

REFERENCIAS

- [1] COLEMAN, A. J. The greatest mathematical paper of all time. *The Math. Intelligencer* 11, 3 (1989), 29–38. (Cited on page 2.)
- [2] DO CARMO, M. *Geometría Riemanniana*. Projeto Euclides, 1979. (Cited on pages 11 and 32.)
- [3] DONALDSON, S. Lie algebra theory without algebra. In *Algebra, Arithmetic, and Geometry*, Y. Tschinkel and Y. Zarhin, Eds., vol. 269 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, 2009. (Cited on pages 5 and 72.)
- [4] HELGASON, S. *Differential geometry and symmetric spaces*. Academic Press, 1969. (Cited on pages 4, 32, 35, and 55.)
- [5] HUMPHREYS, J. *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Springer – Verlag, 1972. (Cited on pages 4, 66, and 69.)
- [6] KNAPP, A. *Lie groups beyond an introduction*. Birkhäuser, 2002. (Cited on pages 4, 55, 60, and 71.)

- [7] MAUBON, J. Symmetric spaces of the non-compact type: differential geometry. In *Séminaires & Congrès, Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidité*, vol. 18. Société mathématique de France, 2009, pp. 293–319. (Cited on page 9.)

Andrés Sambarino
CNRS - Sorbonne Université
IMJ-PRG (CNRS UMR 7586)
4 place Jussieu 75005 Paris France
`andres.sambarino@imj-prg.fr`