Introduction aux espaces symétriques

TD 3

A) Généralités. Soient G un groupe de Lie et $\tau : G \to G$ un morphisme involutif tel que $\mathrm{Ad}(\mathrm{Fix}\,\tau)$ est un sous-groupe compact de $\mathsf{GL}(\mathfrak{g})$. On considère un sous-groupe $K \subset \mathrm{Fix}\,\tau$ tel que $K_e = \mathrm{Fix}\,\tau_e$. Montrer que G/K admet une métrique G-invariante qui est globalement symétrique.

B) Un espace symétrique de $\mathsf{SO}(p,q)$. On considère la forme bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^d$ dont la forme quadratique est

$$\omega : x \mapsto x_1^2 + \cdots + x_p^2 - \left(x_{p+1}^2 + \cdots + x_{p+q}^2\right).$$

C'est une forme de signature (p,q) dans l'espace $\mathbb{R}^{p+q}$ et le groupe préservant cette forme est noté par $\mathsf{O}(p,q)$.

-1. Remarquer que le déterminant d'un élément de $\mathsf{O}(p,q)$ est de module 1. Soit $\mathsf{SO}(p,q)$ le sous-groupe des éléments à déterminant $= 1$. Montrer que $\mathsf{SO}(p,q)$ a deux composantes connexes. Décrire explicitement l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(p,q)$ de ce groupe.

0. On considère l'espace

$$\mathsf{X}_{p,q} = \left\{V \in \mathrm{Gr}_p(\mathbb{R}^d) : \omega|V \text{ est définie positive}\right\}.$$

Montrer que $\mathsf{SO}_e(p,q)$ agit transitivement sur cet espace.

Soient $V \in \mathsf{X}_{p,q}$ et $S_V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ la symétrie axial par rapport à V selon la décomposition $V \oplus V^{\perp_\omega}$.

1. Considérons le produit scalaire o_V de $\mathbb{R}^d$ défini comme ω dans V, comme $-\omega$ dans $V^{\perp_\omega}$ et en gardant l'orthogonalité entre V et $V^{\perp_\omega}$, (c'est en effet un produit scalaire). Soit $T \mapsto T^{*_{o_V}}$ l'application adjointe de o_V, montrer que
$$\mathsf{SO}(p,q) = \left\{g \in \mathsf{SL}_d(\mathbb{R}) = g^{*_{o_V}} S_V g = S_V\right\}.$$

2. On considère l'involution $\tau_V : g \mapsto \left(g^{*_{o_V}}\right)^{-1}$, en vue de la partie précédente elle préserve $\mathsf{SO}(p,q)$. Montrer que $\sigma_V := d_e\tau_V : \mathfrak{so}(p,q) \to \mathfrak{so}(p,q)$ est

$$\sigma_V : x \mapsto S_V x S_V$$

et décrire la décomposition en points fixes et anti-fixes associée, que nous noterons $\mathfrak{k}^V$ et $\mathfrak{p}^V$.

3. Décrire les points fixes de τ_V dans $\mathsf{SO}(p,q)$.
4. On considère la métrique $(\,,)_V$ dans $\mathsf{T}_V\mathsf{X}_{p,q} = \hom(V, V_q^{\perp})$ induite par les produit scalaires $q|V$ et $-q|V^{\perp_\omega}$. C'est une métrique riemannienne dans $\mathsf{X}_{p,q}$. Montrer qu'elle est $\mathsf{SO}(p,q)$-invariante et que $\mathsf{X}_{p,q}$ est un espace globalement symétrique.
5. Décrire la paire dual $\Big(\big(\mathfrak{so}(p,q)\big)^*, \big(\sigma_V\big)^*\Big)$.
6. Pour $\varphi \in \mathsf{T}_V\mathsf{X}_{p,q}$ décrire la forme de Maurer-Cartan $\theta^V(\varphi) \in \mathfrak{p}^V$.
7. Montrer que l'application $\mathsf{X}_{p,q} \to \mathsf{X}_d$ donnée par $V \mapsto o_V$ est totalement géodésique.

Une *droite hyperbolique* de ω est un sous-espace vectoriel P de $\mathbb{R}^d$ de dimension 2, et tel que $\omega|P$ est de signature $(1,1)$. Soit $x \in \mathfrak{p}^V$. Si bien que x est diagonalisable dans un ensemble o_V-orthogonal, on étudie avec plus de précisions les restrictions imposées à cet ensemble par le fait $x \in \mathfrak{so}(p,q)$.

1. Montrer que si $\ell \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ est une droite propre de x de valeur propre $\lambda_\ell(x) \neq 0$ alors $S_V(\ell)$ est aussi une droite propre de x et que $\ell \oplus S_V(\ell)$ est une droite hyperbolique.
2. Soit $\mathscr{m}$ une droite propre de x de valeur propre non-nul et distinct de $\pm\lambda_\ell(x)$, alors les droites hyperboliques $\ell \oplus S_V(\ell)$ et $\mathscr{m} \oplus S_V(\mathscr{m})$ sont ω-orthogonales.
3. En déduire que pour tout $x \in \mathfrak{p}^V$ il existe une décomposition ω-orthogonale
$$\mathbb{R}^d = \ker x \bigoplus_{P \in \mathcal{H}_x} P,$$
où $\mathcal{H}_x$ est une collection finie de droites hyperboliques, chacune S_V-invariante et x-invariante, et telles que pour toute $P \in \mathcal{H}_x$ la restriction $x|P$ a des valeurs propres opposées non-nuls.
4. Réciproquement, montrer qu'un ensemble de droites hyperboliques ω-orthogonales, S_V-invariantes et maximal (par rapport à ces deux propriétés) induit une algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{p}^V$. Un tel ensemble a $\min\{p,q\}$ éléments.
5. Soient $\mathcal{H}$ une collection maximale de droites hyperboliques ω-orthogonales et S_V-invariantes, et $\mathfrak{a}$ l'algèbre abélienne maximale associée. Pour chaque $P \in \mathcal{H}$ fixons de manière arbitraire une droite isotrope $\ell_P \subset P$ et considérons l'application
$$x \in \mathfrak{a} \mapsto \big(\lambda_{\ell_P}(x)\big)_{P \in \mathcal{H}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{H}} \simeq \mathbb{R}^{\min\{p,q\}}.$$
Quelles conditions doivent vérifier les nombres $\big(\lambda_{\ell_P}(x)\big)_{P \in \mathcal{H}}$ pour que $\mathfrak{a}$ soit l'unique algèbre abélienne maximale qui contient x ?

6. On considère l'ensemble des drapeaux incomplets de $\mathbb{R}^d$ isotropes pour ω :

$$\mathcal{F}_\omega = \Big\{ \{\xi_i\}_1^{\min\{p,q\}} : \xi_i \in \mathrm{Gr}_i(\mathbb{R}^d),\ \xi_i \subset \xi_{i+1},\ \omega|\xi_{\min\{p,q\}} \equiv 0 \Big\}.$$

On dit que $\{\xi_i\}$ et $\{\chi_i\}$ sont en *position générale* si

$$\xi_{\min\{p,q\}} \cap \chi_{\min\{p,q\}} = 0.$$

Montrer que deux éléments de $\mathcal{F}_\omega$ en position générale déterminent une unique collection maximale de droites hyperboliques ω-orthogonales.