

Introduction aux espaces symétriques

TD 2

A) Généralités. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Rappelons que la *forme de Killing* est définie comme

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = \text{trace}(\text{ad}_x \circ \text{ad}_y) = \text{trace} \left(z \mapsto [x, [y, z]] \right).$$

1. Montrer que si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, i.e. si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, alors $\kappa_{\mathfrak{h}} = \kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}}$.
2. Montrer que $\kappa_{\mathfrak{g}}$ est $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -associative, c'est-à-dire que pour tous $x, y, z \in \mathfrak{g}$ on a $\kappa_{\mathfrak{g}}([x, y], z) = \kappa_{\mathfrak{g}}(x, [y, z])$.

B) Les isométries de X_d . Soit $\varphi : \text{SL}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \text{isom}_0(X_d)$ le morphisme induit par l'action de $\text{SL}_d(\mathbb{R})$ dans X_d . Le but de cette partie est de démontrer que φ est surjective de noyau $\{\pm \text{id}\}$.

- 0.a Montrer que $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$ n'a pas d'idéaux non triviaux, en particulier $\ker \varphi$ est discret. (On pourra aussi voir directement que $\ker \varphi = \{\pm \text{id}\}$ mais la simplicité de $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$ sera nécessaire par la suite.) Deux stratégies possibles :
 - Montrer que l'action adjointe de $\text{SL}_d(\mathbb{R})$ est irréductible ;
 - Considérer la base standard $\{e_{ij}, f_{ij} : j \neq i\}$ où e_{ij} a l'entrée (i, j) égale à 1 et zéro partout ailleurs et $f_{ij} = e_{ii} - e_{jj}$, si $\mathfrak{J}$ est un idéal de $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$ et $T \in \mathfrak{J}$, voir l'effet que le crochet $[e_{ij}, T]$ a sur T , pour ensuite montrer que la dite base est contenue dans $\mathfrak{J}$.

- 0.b En déduire que la forme de Killing $\kappa_{\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})}$ est non-dégénérée.

Pour simplifier les notations on oublie d'ores en avant φ et on pense à $\text{PSL}_n(\mathbb{R})$ comme un sous-groupe de $\text{isom}_0(X_d)$ et à $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ comme une sous-algèbre de $\mathfrak{J}$ (l'algèbre de Lie de $\text{isom}_0(X_d)$).

1. Soient $o \in X_d$ et $\mathcal{J}_o$ la symétrie central par rapport à o , que nous savons est une isométrie. Nous avons deux involutions :

$$\begin{aligned} \tau^o : \text{SL}_d(\mathbb{R}) &\rightarrow \text{SL}_d(\mathbb{R}), & \tau^o(g) &= (g^{-1})^{*o} \\ \Psi^o : \text{isom}_0(X_d) &\rightarrow \text{isom}_0(X_d), & \Psi^o(f) &= \mathcal{J}_o f \mathcal{J}_o. \end{aligned}$$

Montrer que si $g \in \text{PSL}_d(\mathbb{R})$ alors $\Psi^o(\varphi(g)) = \varphi(\tau^o(g))$. (Rappel : on l'a déjà fait). Notons accessoirement par

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) &= \mathfrak{k}^o \oplus \mathfrak{p}^o \\ \mathfrak{J} &= \tilde{\mathfrak{k}}^o \oplus \tilde{\mathfrak{p}}^o, \end{aligned}$$

les décompositions en points fixes et anti-fixes induites.

2. Déduire de la partie précédente que $\mathfrak{p}^o = \tilde{\mathfrak{p}}^o$. Montrer aussi que $\mathfrak{p}^o \oplus [\mathfrak{p}^o, \mathfrak{p}^o]$ est un idéal de $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$ et en déduire que $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) = \mathfrak{p}^o \oplus [\mathfrak{p}^o, \mathfrak{p}^o]$.
3. Montrer de même que $\mathfrak{p}^o \oplus [\mathfrak{p}^o, \mathfrak{p}^o]$ est un idéal de $\mathfrak{J}$ et en déduire que $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$ est un idéal de $\mathfrak{J}$. En déduire que la forme de Killing $\kappa_{\mathfrak{J}}$ de $\mathfrak{J}$ est non-dégénérée quand restreinte à $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$.
4. Soit $\mathfrak{s} = (\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}))^{\perp_{\kappa_{\mathfrak{J}}}}$, montrer que c'est un idéal de $\mathfrak{J}$. Montrer via un calcul de dimension que $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) = \mathfrak{J}$ et que $\mathfrak{s} \subset \tilde{\mathfrak{k}}^o$. Astuce : pour l'inclusion utiliser le fait que $\tilde{\mathfrak{k}}^o \perp_{\kappa_{\mathfrak{J}}} \mathfrak{p}^o$ et que $\kappa_{\mathfrak{J}}|_{\mathfrak{p}^o}$ est non-dégénérée.
5. Soit $S \subset \text{isom}_0(X_d)$ le sous-groupe connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$, c'est un sous-groupe normal de $\text{isom}_0(X_d)$. Montrer que S agit trivialement sur X_d , d'où $S = \{\text{id}\}$, $\mathfrak{s} = \{0\}$ et (en fin) $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) = \mathfrak{J}$.

C) Métriques invariantes pour les groupes compacts. Soit K un groupe de Lie compact.

1. Soit ω_e une forme de volume sur $T_e K = \mathfrak{k}$. Construire à l'aide de ω_e une mesure bi-invariante sur K de masse totale finie.
2. Soit $\rho : K \rightarrow \text{GL}(V, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une représentation. Montrer qu'il existe un produit (scalaire ou hermitien) sur V $\rho(K)$ -invariant.
3. Soit $h \mapsto (\cdot, \cdot)_h$ une métrique invariante à gauche dans un groupe de Lie H , montrer que si $(\cdot, \cdot)_e$ est Ad-invariante alors $(\cdot, \cdot)_h$ est invariante à droite.
4. Montrer que K admet une métrique riemannienne bi-invariante.
5. Supposons maintenant que K est un sous-groupe d'un groupe de Lie G et que $\text{Ad}_G(K)$ est un sous-groupe compact de $\text{GL}(\mathfrak{g})$. Montrer que l'espace G/K admet une métrique riemannienne invariante par l'action de G .

D) Les grassmanniennes de $\mathbb{R}^d$. On considère la k -grassmannienne de $\mathbb{R}^d$

$$\text{Gr}_k(\mathbb{R}^d) = \{V \subset \mathbb{R}^d : \text{sous-espace avec } \dim V = k\}.$$

Le but de cette partie est de comprendre la structure d'espace globalement symétrique de ces espaces. Soit o un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ fixé d'ore en avant.

1. Soit $\text{SO}(o)$ le groupe des matrices de $\text{SL}_d(\mathbb{R})$ qui préservent o , c'est un groupe compact. Remarquer que $\text{Gr}_k(\mathbb{R}^d)$ est un espace $\text{SO}(o)$ -homogène dont le stabilisateur de V est

$$\text{S}(\text{O}(o|_V) \times \text{O}(o|_{V^\perp})).$$

(Ceci donne, en particulier, une topologie à l'espace $\text{Gr}_k(\mathbb{R}^d)$.)

2. Démontrer que pour $V \in \text{Gr}_k(\mathbb{R}^d)$, l'espace tangent $T_V \text{Gr}_k(\mathbb{R}^d)$ s'identifie naturellement à $\text{hom}(V, V^\perp) = V^* \otimes V^\perp$. On définit la métrique $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ sur $T_V \text{Gr}_k(\mathbb{R}^d)$ comme la métrique induite dans $V^* \otimes V^\perp$ par $o|_V$ et $o|_{V^\perp}$.

3. Montrer que $(\text{Gr}_k(\mathbb{R}^d), V \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ est un espace globalement symétrique. Astuce : pour V donné, considérer la symétrie axial $s_V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ et les involutions qu'elle induit.
4. Remarquer que l'action de $\text{SO}(o)$ dans $\text{Gr}_k(\mathbb{R}^d)$ est par isométries.
5. Notons par $\mathcal{J}_V$ la symétrie central par rapport à V obtenue dans la partie 3. Pour $V \in \text{Gr}_k(\mathbb{R}^d)$ décrire la décomposition de

$$\mathfrak{so}(o) = \text{T}_{\text{id}} \text{SO}(o) = \{X \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) : \forall u, v \in \mathbb{R}^d \ o(Xu, v) + o(u, Xv) = 0\}$$

en points fixes et anti-fixes associées à l'involution $f \mapsto \mathcal{J}_V f \mathcal{J}_V$.

6. Décrire l'image de $\varphi \in \text{hom}(V, V^\perp) = \text{T}_V \text{Gr}_k(\mathbb{R}^d)$ par la forme Maurer-Cartan $\theta^V : \text{T}_V \text{Gr}_k(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathfrak{so}(o)$.
7. Montrer que si $\varphi \in \text{hom}(V, V^\perp)$ est de rang = 1 (i.e. l'image de φ est de dimension 1) alors la géodésique par V de vitesse φ est fermée.
8. Trouver une géodésique par V qui n'est pas fermée (en vue de la partie précédente il faut supposer $k \notin \{1, d-1\}$). Astuce : se placer dans un cadre particulier, genre $\text{Gr}_2(\mathbb{R}^4)$ par exemple.

E) Les groupes Spin. Soit Q une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur un espace vectoriel V (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). L'*algèbre de Clifford* de Q , $C(Q)$, est l'algèbre associative avec unité engendrée par V , telle que pour tout $v \in V$ on ait

$$v \cdot v = Q(v, v)1.$$

Cette algèbre peut se construire comme le quotient de $\bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$ par l'idéal engendré par $\{v \otimes v - Q(v, v)1\}$.

1. Montrer que si $\{e_i\}_1^{\dim V}$ est une base de V alors

$$\{e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k} : i_1 < \dots < i_k, k \in \llbracket 1, \dim V \rrbracket\}$$

est une base de $C(Q)$, en déduire que $C(Q)$ est de dimension $2^{\dim V}$ en tant qu'espace vectoriel. Astuce : remarquer que $e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i = 2Q(e_i, e_j)$.

2. Remarquer que l'application $\mathbf{p} : C(Q) \rightarrow \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$ définie dans les générateurs comme

$$\mathbf{p}(v_1 \cdot \dots \cdot v_r) = r \pmod{2}$$

est multiplicative (autrement dit, si $v_1 \cdot \dots \cdot v_r \in C(Q)$ avec $v_j \in V$ alors la *parité* de r est bien définie). Soit $C(Q)^{\mathbf{p}}$ son noyau, c'est un espace vectoriel de dimension $2^{\dim V - 1}$.

3. Un exemple : soit o le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$, montrer que $C(-o)^{\mathbf{p}}$ est isomorphe aux quaternions de Hamilton $\mathbb{H}$.

4. Revenant au cadre général. Montrer que les éléments du centre de $C(Q)$ dans la partie paire sont les scalaires, c'est-à-dire,

$$Z(C(Q)) \cap C(Q)^p = \mathbb{K}1.$$

Astuce : Soit $\{e_i\}$ une base orthogonale de V , pour $x \in Z(C(Q))$ écrivons $x = \sum_I a_I e_I$. Remarquer que $e_I \cdot e_j = (-1)^{|I|} e_j \cdot e_I$ si $j \notin I$ et que $e_I \cdot e_j = (-1)^{|I|-1} e_j \cdot e_I$ si $j \in I$.

5. On considère la *conjugaison* de $C(Q)$ définie dans les générateurs comme

$$(v_1 \cdot \dots \cdot v_r)^* = (-1)^r v_r \cdot \dots \cdot v_1.$$

Montrer que $(xy)^* = y^* x^*$.

6. Soit $u \in V$ avec $Q(u, u) = -1$. Montrer que l'application $v \mapsto u \cdot v \cdot u$ est la symétrie axiale de V par rapport à $u^\perp$.
7. Soit alors le groupe

$$\text{Spin}(Q) = \{x \in C(Q)^p : x \cdot x^* = 1 \text{ avec } xVx^* \subset V\}.$$

Par définition, $x \in \text{Spin}(Q)$ agit dans V comme $\rho_x(v) = x \cdot v \cdot x^*$. Montrer que ρ_x préserve Q et que le noyau de $\rho : \text{Spin}(Q) \rightarrow O(Q)$ est $\{1, -1\}$.

8. Montrer que tout élément de $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme un produit paire de symétries axiales le long des hyperplans de $\mathbb{R}^n$. En déduire qu'en prenant $-Q$ égale au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ alors l'image de l'application ρ contient $\text{SO}_n(\mathbb{R})$.
9. Montrer que $\text{Spin}_n(\mathbb{R}) = \text{Spin}(-o)$ où o est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ est un groupe connexe. Astuce, soient $v, w \in \mathbb{R}^n$ avec $o(v, v) = o(w, w) = 1$ et $o(v, w) = 0$, alors la courbe

$$t \mapsto (\cos(t)v + \sin(t)w) \cdot (\cos(t)v - \sin(t)w)$$

joint -1 à 1 dans $\text{Spin}_n(\mathbb{R})$.