Introduction aux espaces symétriques

TD 1

Rappelons que nous avons définit X_d comme l'espace des produits scalaires sur $\mathbb{R}^d$ à homothétie près.

Généralités

1. Montrer que l'action de $\mathsf{SL}_d(\mathbb{R})$ dans X_d est transitive et qu'elle factorise par $\mathsf{PSL}_d(\mathbb{R}) = \mathsf{SL}_d(\mathbb{R})/\{\pm \mathrm{id}\}$.
2. Montrer que l'action de $\mathsf{SL}_d(\mathbb{R})$ dans le fibré tangent unitaire $\mathsf{T}^1\mathsf{X}_d$ n'est pas transitive, sauf pour $d = 2$.
3. Soit G un groupe topologique connexe et $\mathcal{U}$ un voisinage de l'identité. Montrer que le groupe engendré par $\mathcal{U}$ est G.

Plongement par bloques

1. Considérons le morphisme $i : \mathsf{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathsf{SL}_3(\mathbb{R})$ donné par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $o \in \mathsf{X}_2$, considérons le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$ défini comme $i_o|\mathbb{R}^2 \times \{0\} = o$, $i_o(e_3, e_3) = 1$ et $e_3 \perp_{i_o} (\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2)$. Montrer que l'application $\mathsf{X}_2 \to \mathsf{X}_3$ $o \mapsto i_o$ est un plongement totalement géodésique i-équivariant.

Les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^2$. On considère l'espace des polynômes homogènes de dégrée 2 en 2-variables

$$\mathsf{Q}(\mathbb{R}^2) = \{ax^2 + bxy + cy^2 : a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

C'est un espace muni d'une action par $\mathsf{GL}_2(\mathbb{R})$ définie comme, pour $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et $q \in \mathsf{Q}(\mathbb{R}^2)$,

$$g \cdot q = q(\delta x + \beta y, -\gamma x + \alpha y). \tag{1}$$

Notons par $\tau_3 : \mathsf{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathsf{GL}\left(\mathsf{Q}(\mathbb{R}^2)\right)$ le morphisme définit par cette action.

1. Chaque $q \in \mathsf{Q}(\mathbb{R}^2)$ induit une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ par la formule $(x, y) \mapsto q(x, y)$. Montrer que l'action de $\mathsf{GL}_2(\mathbb{R})$ par pré-composition $q \mapsto q \circ g^{-1}$ est celui de l'equation (1).
2. Soit $q \in \mathsf{Q}(\mathbb{R}^2)$ une forme de signature $(1, 1)$. Si $\ell \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ est définie négative pour q, soit o_ℓ le produit scalaire de $\mathbb{R}^2$ définit comme $o_\ell(\ell, \ell^{\perp_q}) = 0$, $o_\ell|\ell = -q|\ell$ et $o_\ell|\ell^{\perp_q} = q|\ell^{\perp_q}$. Montrer que les droites isotropes de q sont o_ℓ-orthogonales.

3. On considère les sous-groupes de $\mathsf{SL}_2(\mathbb{R})$ définis par
$$N = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : s \in \mathbb{R} \right\}$$
$$U = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$
En regardant l'action linéaire sur $\mathbb{R}^2$, montrer que $\mathsf{SL}_2(\mathbb{R})$ est engendré, en tant que groupe, par N et U.
4. Considérons le *discriminant* $\Delta : \mathsf{Q}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ défini par
$$\Delta(ax^2 + bxy + cy^2) = b^2 - 4ac.$$
Montrer que Δ est une forme quadratique de signature $(2,1)$, invariante par l'action de $\mathsf{SL}_2(\mathbb{R})$. Astuce : Il suffit de le vérifier pour les sous-groupes N et U.
5. Réciproquement, montrer que l'application obtenue $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{R}) \to \mathsf{SO}_0(\Delta)$ est un isomorphisme. (Or la signature de Δ est $(1,2)$ on obtient bien l'*isogénie* $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathsf{SO}_0(1,2)$.)
6. Remarquer que $q \in \mathsf{Q}(\mathbb{R}^2)$ est définie positive si et seulement si $\Delta(q) < 0$. On considère donc l'application $\varphi : \mathsf{X}_2 \mapsto \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ donnée par, si $o(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ alors
$$\varphi(o) = \frac{-b + \sqrt{-1}\sqrt{-\Delta(o)}}{2a}.$$
Montrer que φ est bien définie et $\mathsf{SL}_2(\mathbb{R})$-équivariante, l'action de $\mathsf{SL}_2(\mathbb{R})$ dans $\{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ étant par transformations de Möbius
$$\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \cdot z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$
En déduire que l'espace X_2 est isométrique au plan hyperbolique réel $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$.
7. Noter que l'action linéaire de $\mathsf{SL}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^2$ définit une action de $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{R})$ dans la droite projective $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$. On considère l'application $f : \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
$$\ell = \{(x,y) : ax + by = 0\} \mapsto b/a.$$
Deḿontrer que f est équivariante, l'action de $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ étant par transformations de Möbius.
8. Considérons l'application *de Veronesse* $\xi : \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{P}\big(\mathsf{Q}(\mathbb{R}^2)\big)$, définie par
$$\ell = \{(x,y) : ax + by = 0\} \mapsto q(x,y) = (ax + by)^2.$$
Remarquer que l'image de ξ est bien le cône isotrope de Δ et que ξ est $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{R})$-équivariante.

9. Soient $\ell_1 \oplus \ell_2$ une décomposition de $\mathbb{R}^2$ en somme de deux droites et $a \in \mathsf{SL}_d(\mathbb{R})$ une matrice diagonalizable dans l'ensemble $\{\ell_1, \ell_2\}$. Montrer que $\tau_3(a)$ est diagonalizable dans l'ensemble

$$\{\xi(\ell_1), \xi(\ell_2), \big(\xi(\ell_1) \oplus \xi(\ell_2)\big)^{\perp}\}.$$

10. Soit $o \in \mathsf{X}_2$ tel que $o(\ell_1, \ell_2) = 0$. Considérons l'orthogonal $o^{\perp}$ de o pour la forme Δ et considérons le produit scalaire (à homothétie près) sur $\mathsf{Q}(\mathbb{R}^2)$ définit comme suit : $r_o|o$ vaut $-\Delta|o$, $r_o|o^{\perp}$ vaut $\Delta|o^{\perp}$ et $o \perp_{r_o} o^{\perp}$. Montrer que la décomposition

$$\mathbb{R}^3 = \xi(\ell_1) \oplus \xi(\ell_2) \oplus \big(\xi(\ell_1) \oplus \xi(\ell_2)\big)^{\perp}$$

est r_o-orthogonale. (Astuce : utiliser la partie 2.) En déduire que l'application $\mathsf{X}_2 \to \mathsf{X}_3$ définie comme $o \mapsto r_o$ est totalement géodésique.

11. Montrer que les plongement géodésiques r_o et i_o de X_2 dans X_3 ne sont pas conjugués, c'est à dire, qu'il n'existe pas $g \in \mathsf{SL}_3(\mathbb{R})$ tel que $g\big(r(\mathsf{X}_2)\big) = i(\mathsf{X}_2)$. (Astuce : montrer que $\tau_3\big(\mathsf{SL}_2(\mathbb{R})\big)$ agit irréductiblement sur $\mathsf{Q}(\mathbb{R}^2)$).

L'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par

$$q(x_0, \dots, x_n) = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2,$$

et ω la forme bilinéaire associé, on denote par $\perp$ l'orthogonalité associée à ω. On définit $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ comme l'espace

$$\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}} = \big\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : q(x) = -1 \text{ et } x_0 > 0\big\}$$

muni de la forme $\omega|\mathsf{T}\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$. Soit

$$\mathsf{O}_{n,1} = \mathsf{O}(\omega, \mathbb{R}) = \big\{g \in \mathsf{GL}_{n+1}(\mathbb{R}) : \forall u, v \text{ on a } \omega(gu, gv) = \omega(u, v)\big\}.$$

1. Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ la forme $\omega|\mathsf{T}_p\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ est définie positive, l'application $p \mapsto \omega|\mathsf{T}_p\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ est donc une métrique riemannienne sur $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$.
2. Remarquer que les éléments de $\mathsf{O}(\omega, \mathbb{R})$ ont déterminant $\in \{\pm 1\}$, que le groupe $\mathsf{SO}(\omega, \mathbb{R})$ a deux composantes connexes, et démontrer que la composante connexe de l'identité $\mathsf{SO}_0(\omega, \mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$. (Il est convenable de commencer par $\mathsf{SO}_{1,1}$ puis de comprendre le stabilisateur dans $\mathsf{SO}_0(\omega, \mathbb{R})$ du point $(1, 0, \dots, 0)$.)
3. Soit $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $q(u) = 1$, montrer que $\omega|u^{\perp}$ est de signature $(1, n-1)$ et que $u^{\perp} \cap \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ est une copie totalement géodésique de $\mathbb{H}^{n-1}_{\mathbb{R}}$. Réciproquement, montrer que toute copie totalement géodésique de $\mathbb{H}^{n-1}_{\mathbb{R}}$ est ainsi obtenue.

4. Utiliser le fait que $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ est à courbure constante -1 pour montrer qu'il en est de même pour $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$.
5. Pour $p \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ on considère le produit scalaire sur $\mathbb{R}^{n+1}$ définit par les propriétés suivantes

$$o_p = \begin{cases} o_p|\mathbb{R}\cdot p = -\omega|\mathbb{R}\cdot p \\ o_p|p^\perp = \omega|p^\perp \\ o_p(p, p^\perp) = 0 \end{cases}$$

   Montrer que l'application $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}} \to \mathsf{X}_{n+1}$ définie par $o \mapsto o_p$ est totalement géodésique.
6. On considère la boule $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$, où $\|\ \|$ est la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$, et $f : \{0\} \times \mathbb{B}^n \to \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ la projection stéréographique vu du point $(-1, 0, \ldots, 0)$. Montrer que f est un difféomorphisme et que $f^*\omega$ est la métrique riemannienne sur $\mathbb{B}^n$ définie par

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_x := \frac{4\,\langle\cdot,\cdot\rangle}{(1-\|x\|^2)^2},$$

   où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

Isométries de $\mathbb{H}^3_{\mathbb{R}}$. On considère les matrices hermitiennes 2×2, c'est-à-dire

$$\mathrm{Herm}(2) = \{T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \text{ linéaire} : T^* = T\}$$

où T^* est l'adjoint de T pour le produit hermitien canonique de $\mathbb{C}^2$.

1. Remarquer que Herm(2) est isomorphe (en tant qu'espace vectoriel) à $\mathbb{R}^4$,
2. Remarquer aussi que $\det : \mathrm{Herm}(2) \to \mathbb{R}$ induit une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ dont la signature est $(1, 3)$,
3. Pour $g \in \mathsf{PSL}_2(\mathbb{C})$ on considère l'action sur Herm(2) donnée par

$$(g, T) \mapsto g \circ T \circ g^*.$$

   Remarquer que cette action preserve det et qu'on obtient un morphisme $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{C}) \to (\mathsf{SO}_{1,3})_0$.
4. Démontrer que ce morphisme est un isomorphisme.