Dia 2

Superficies hiperbólicas

Consideramos $\mathbb{H}^+ = \{ z : \operatorname{Im} z > 0 \}$ el semiplano superior y

$Aut(\mathbb{H}^2) = \{$biholomorfismos $\mathbb{H}^+ \to \mathbb{H}^+\} = \{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : ad-bc=1 \}$

es isomorfo a $PSL(2,\mathbb{R}) = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad-b=1 \} / \{1,-1\}$

Una estructura hiperbólica en una superficie S es un cubrimiento $\mathcal{U}$ y homeomorfismos $\{ \varphi_U : U \to \mathbb{H}^+ : U \in \mathcal{U} \}$ tales que

$\varphi_U \circ \varphi_V^{-1} : \varphi_V(U \cap V) \to \varphi_V(U \cap V)$ se extiende a un elemento de $Aut(\mathbb{H}^+)$

hiperbólica $\Rightarrow$ ~~sup~~ de Riemann pero tiene mas estructura que viene de $Aut(\mathbb{H}^+) \curvearrowright \mathbb{H}^+$

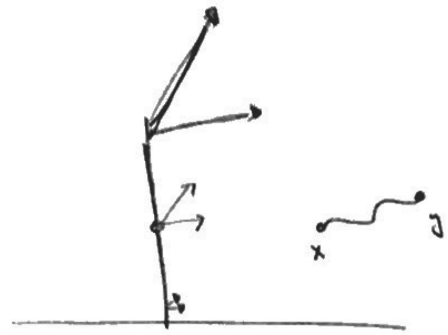
Métrica hiperbólica: es una métrica Riemanniana (i.e. en cada $T_z\mathbb{H}^+$ una p.i. y la dependencia $z \mapsto \langle \, , \rangle_z$ diferenciable)

definida por

$$\langle v, w\rangle_z = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{(\operatorname{Im} z)^2}$$

- invariante por $\operatorname{Aut}(\mathbb{H}^+)$

$$\langle v, w\rangle_z = \langle T'(z)\cdot v, T'(z)\cdot w\rangle_{Tz}$$



Induce una distancia en $\mathbb{H}^+$: si $\gamma : I \to \mathbb{H}^+$ curva definimos su longitud como $\ell(\gamma) = \int_I \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}\, dt$

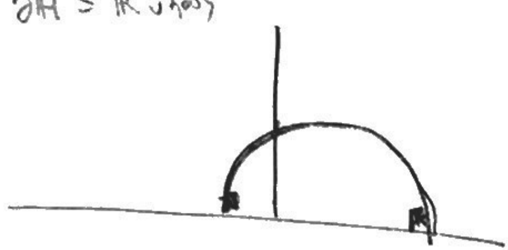
$$d_{\mathbb{H}^+}(x, y) = \inf\{\ell(\gamma) : \gamma \text{ curva de } x \text{ a } y\}.$$

- $\mathbb{H}^+$ completo con esta métrica

Geodésicas $\gamma : I \to \mathbb{H}^+$ isometría local (curvas que localmente minimizan distancia)

Una cuenta: las geodésicas de $\mathbb{H}^+$ son las semirrectas verticales y los semi-círculos ortogonales a $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

- completas ($\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^+$)
- unicidad: una única geodésica por cada $(p, v) \in T^1\mathbb{H}^+$
- globalmente minimizantes ($\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^+$ isometría global).



$\operatorname{Aut}\mathbb{H}^+ \curvearrowright$ transitivo en espacio de geodésicas

Si ~~S~~ S es una superficie hiperbólica $\Rightarrow$ S hereda una métrica Riemanniana :

$$\langle u, v\rangle_p := \langle d\varphi_U(u), d\varphi_U(v)\rangle_p$$

$\uparrow$ no depende de la carta local usada

d distancia inducida, geodésicas ahora solo localmente minimizantes etc.

Una geodésica γ es cerrada si es periódica $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S$

Prop: S superficie hiperbólica **completa**, $\alpha \neq 0$ clase de homotopía libre no periférica entonces $\exists$ única geodésica cerrada en α.

ningún componente de $S - \gamma$ es $\cong S^1 \times (0,1)$ $(\gamma \in \alpha)$

Una métrica elige un representante en cada clase α no periférica.

Dem: $\inf\{\ell(\gamma) : \gamma \in \alpha\} \neq 0$ (Existencia

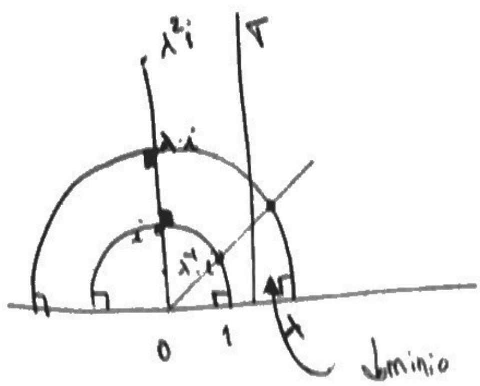
considerar entonces la curva que realice el mínimo ■

Ejemplos de superficies hiperbólicas

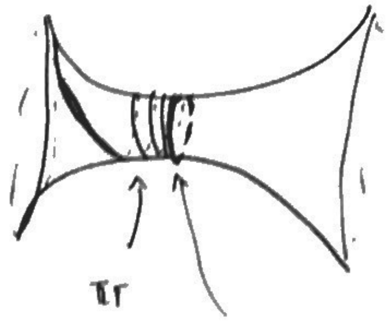
- subgrupos discretos de $Aut(\mathbb{H}^+)$
- recorte y pegue de superficies con borde geodésico

$\lambda > 1$

$\Gamma = \{ z \mapsto \lambda^n z : n \in \mathbb{Z} \}$



$H^+/\Gamma \xrightarrow{\pi}$

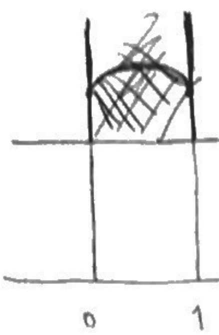


dominio fundamental

$\pi\gamma$

curva mas corta no homotópicamente trivial

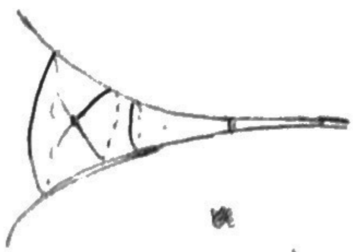
$\Gamma = \{ z \mapsto z+n \quad n \in \mathbb{Z} \}$



área finita

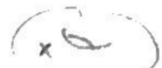
$H^+/\Gamma \longrightarrow$

cusp

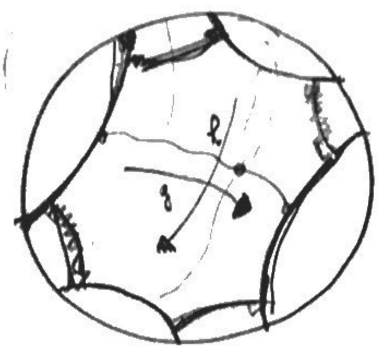


no hay geodésicas cerradas en el cusp.

El toro pinchado: dos tipos de métricas completas en $S_{1,1}$



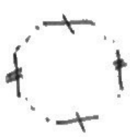
pasamos al modelo del Disco $D = \{ z : |z| < 1 \}$



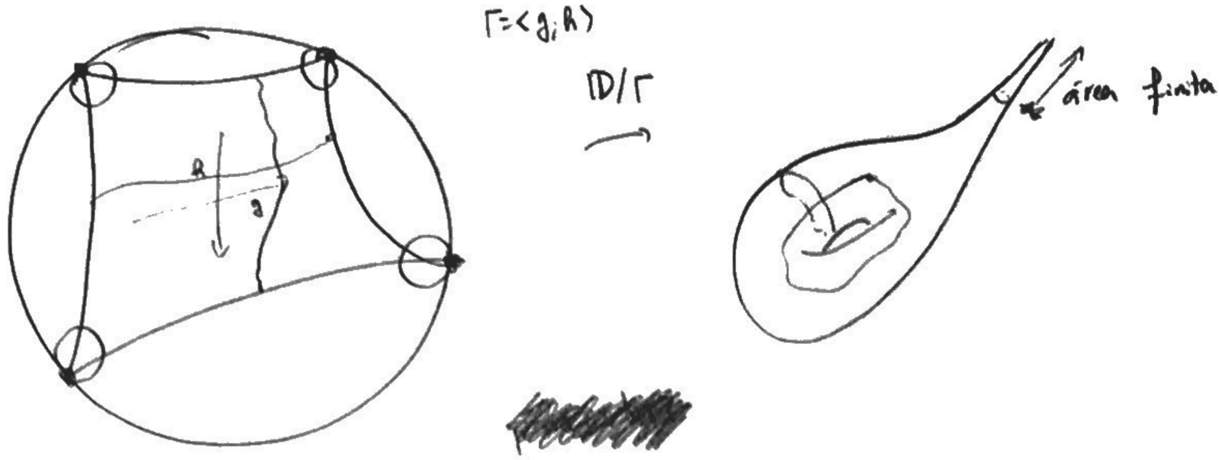
$H^+/\Gamma \longrightarrow$

curva mas corta en su clase, geodésica de longitud $\sum a_i$

$\Gamma = \langle g, h \rangle$



El toro pinchado con un cusp



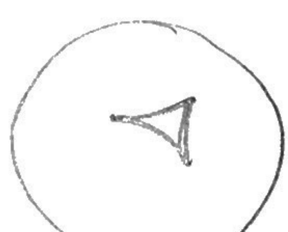
[redacted]

Identidad de McShane '91 Consideramos un toro pinchado con un cusp

$$\Rightarrow \sum_{\substack{\gamma \text{ geodésica} \\ \text{cerrada simple}}} \frac{2}{1+e^{\ell(\gamma)}} = 1$$

Hacia una demostración...

Gauss-Bonnet



$\Delta(\alpha,\beta,\gamma)$: triángulo geodésico de ángulos internos α, β y γ

$\Rightarrow \pi - \alpha - \beta - \gamma = \text{área}(\Delta)$

- No hay triángulos homotéticos.
- Un único triángulo (módulo isometrías) con ángulos dados

S superficie de género g con n pinchaduras;

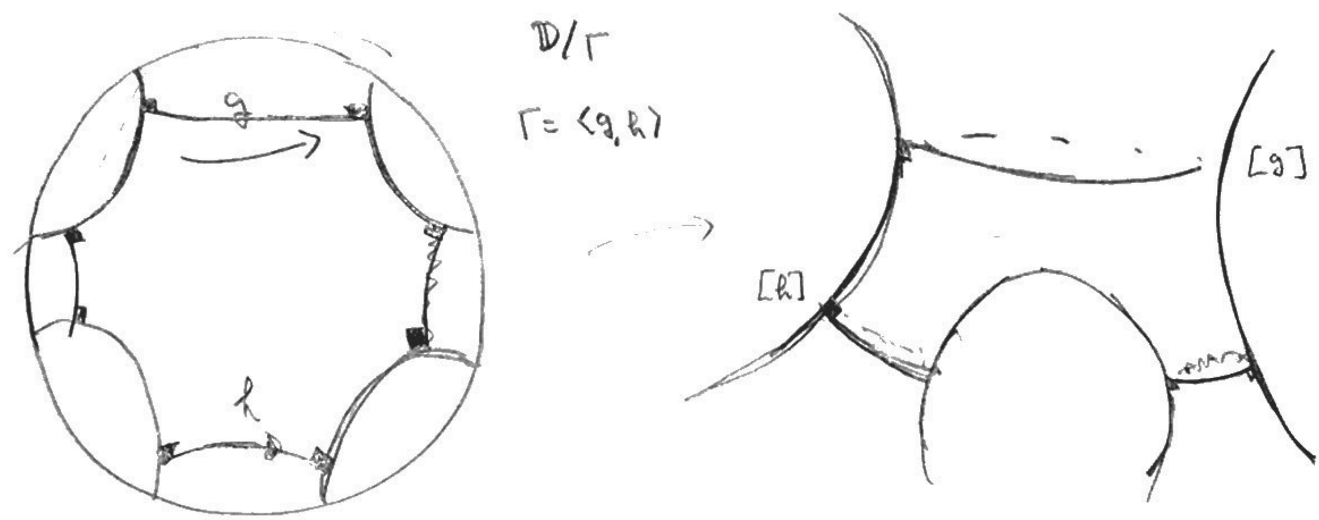
$\Rightarrow$ el área de una estructura hiperbólica en S con cusps en las pinchaduras

es $2\pi|\chi(S)| = 2\pi(2g-2+n)$

El par de pantalones:

Def: Un par de pantalones es una superficie homeomorfa al plano menos dos puntos = $S_{0,3}$

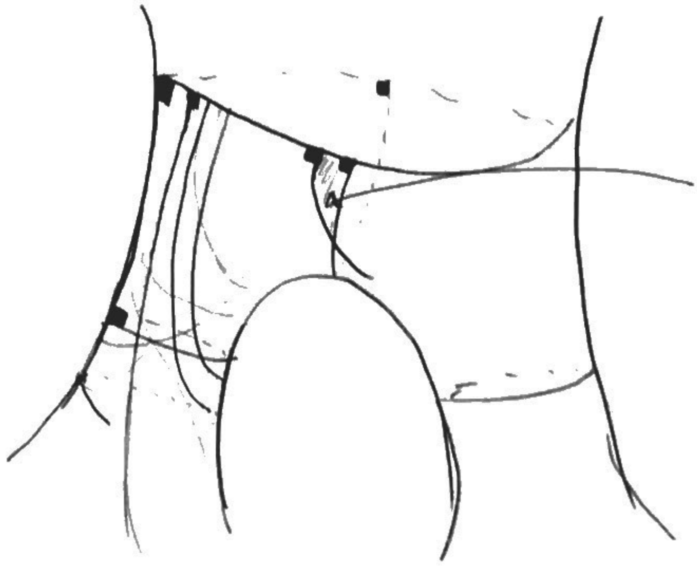
Estructuras hiperbólicas en un par de pantalones (con borde geodésico)



Proposición. La geometría del par de pantalones queda únicamente determinada por las longitudes de las geodésicas cerradas en cada clase $[g]$; $[h]$; $[gh]$. Cualquier tripleta de longitudes es posible.

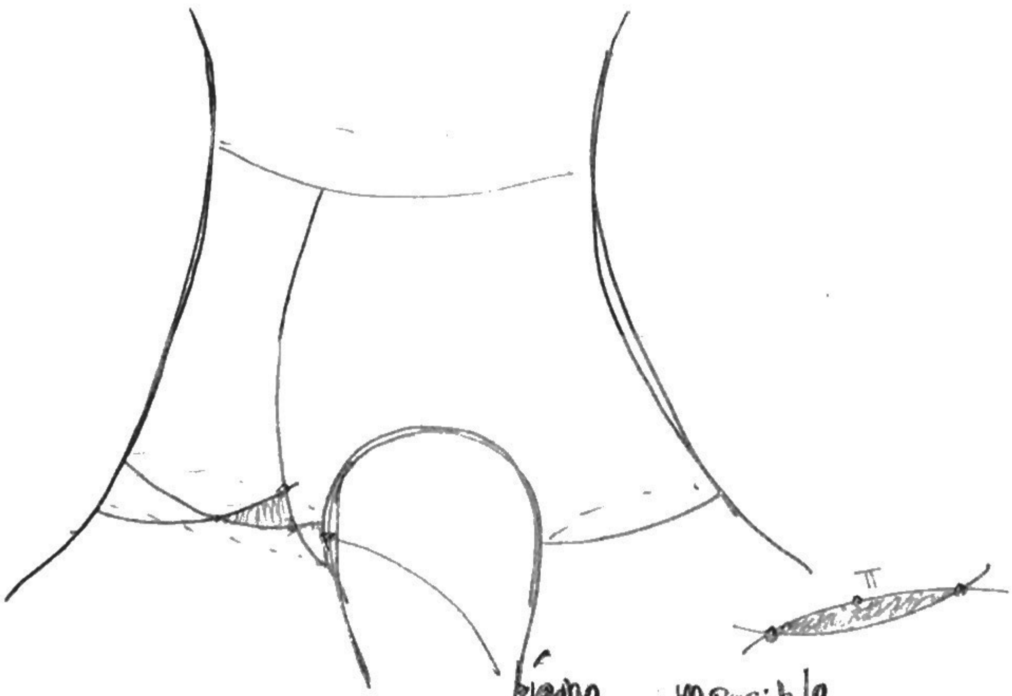
Geodésicas ortogonales a un borde:

Prueba de Mirzakhani '07, generalizable a superficies con arbitrarias pinchaduras algunas con borde geodésico y otras con cusp.

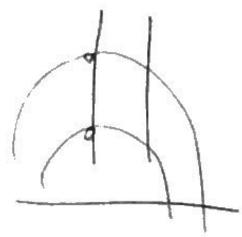


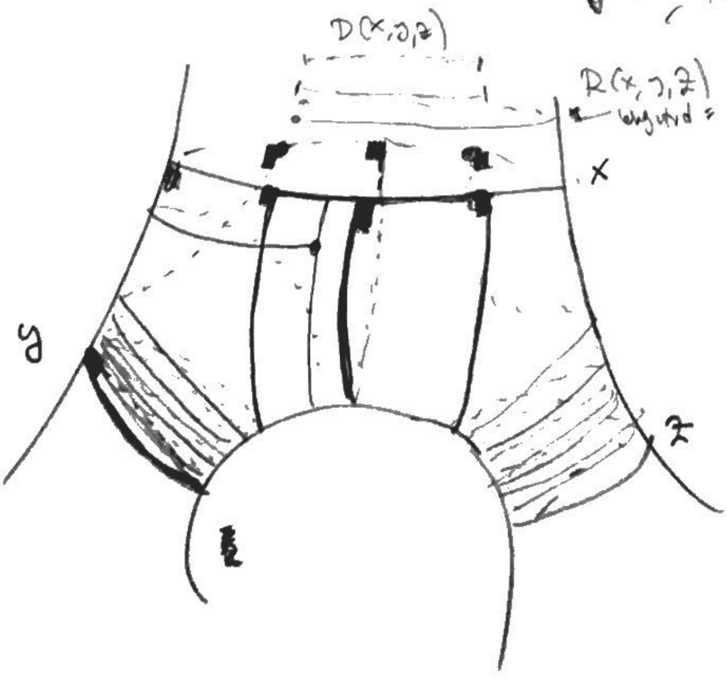
triángulo geodésico con ángulos

$\pi/2 + \pi/2 + \alpha > \pi$ imposible



bígono imposible





$$D(x,y,z) = D(x,z,y)$$

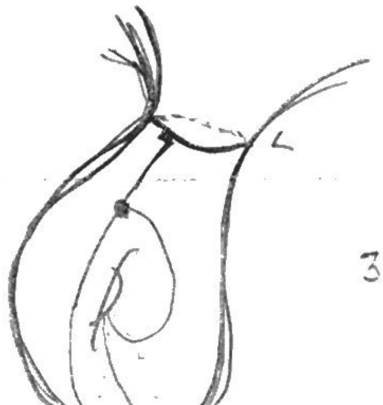
$$R(x,y,z) + R(x,z,y) = x + D(x,y,z)$$

Mirzakhani-McShane para toro pinchado con borde geodésico: '07

Consideramos una estructura hiperbólica con borde geodésico en $S_{1,1}$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{\gamma \text{ geodésica cerrada simple} \\ \text{no periférica}}} D(L, \ell(\gamma), \ell(\gamma)) = L$$

Dem:



$P \in \Gamma$, consideramos la geodésica ortogonal a Γ por P apuntando para adentro.

3 posibilidades excluyentes

- no tiene autointersecciones
- interseca Γ
- tiene auto-intersecciones.

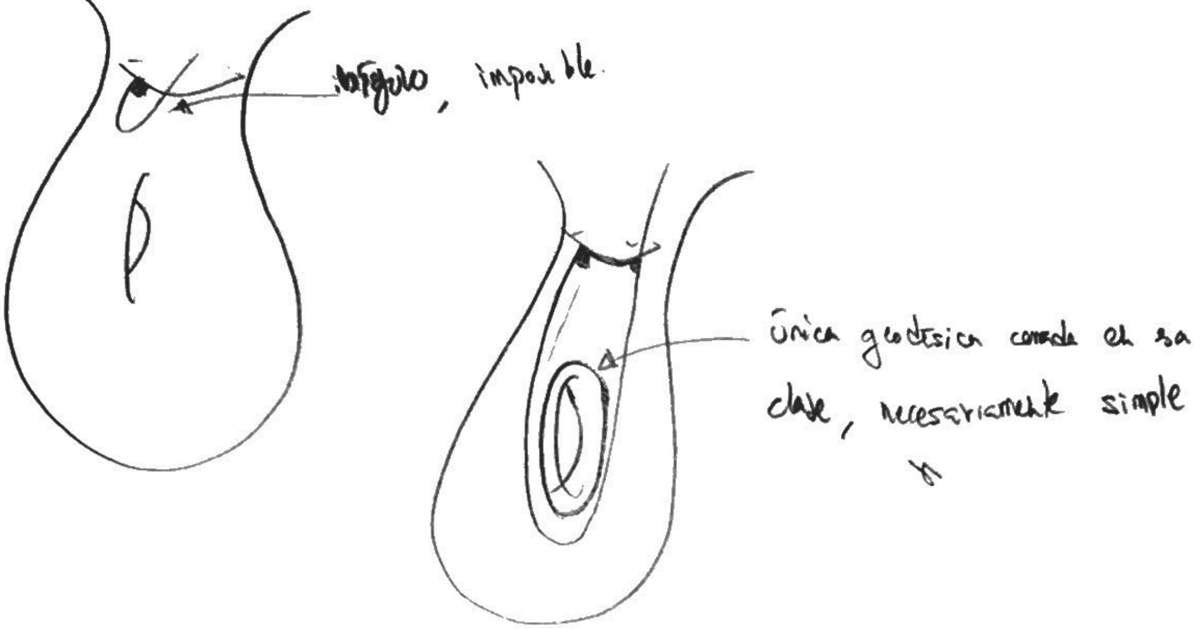
$P \in \Gamma$ tales que γ_P verifican esto tienen medida 0.

- Birman-Series.
- Patterson-Sullivan

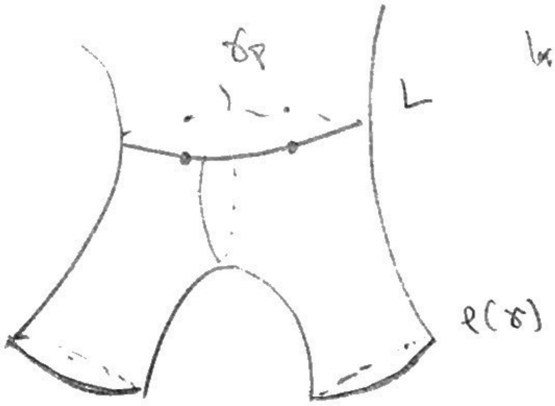
$$L = \mu(\quad) + \mu(\quad)$$

μ = medida de Lebesgue en Γ de masa total L dada por $\Gamma: \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \to S_{1,1}$ isometría.

• la geodésica γ^A_p interseca T

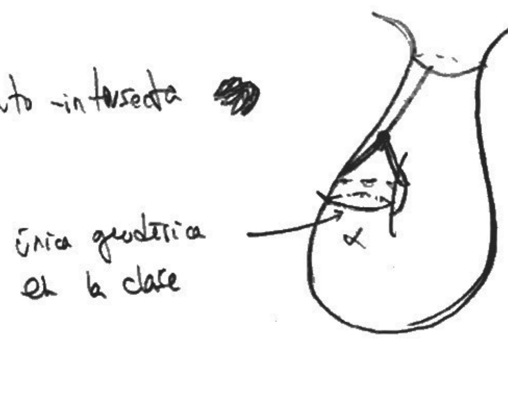


tijeretazo en su geodésica

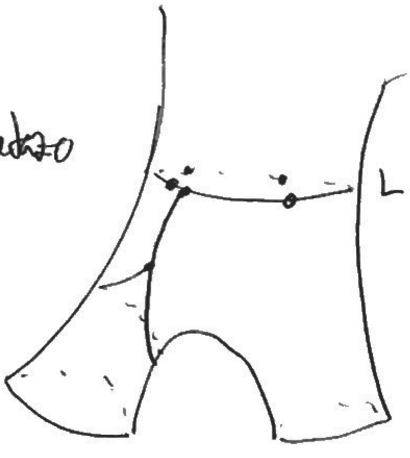


los p que verifican esto contribuyen con: $D(L, \rho(\gamma), \rho(\gamma'))$

• γ_p se auto-interseca



tijeretazo



$$\Rightarrow L = \sum_{\substack{\gamma \text{ cerrada simple} \\ \text{no periférica}}} D(L, \rho(\gamma), \rho(\gamma')) \qquad \blacksquare$$

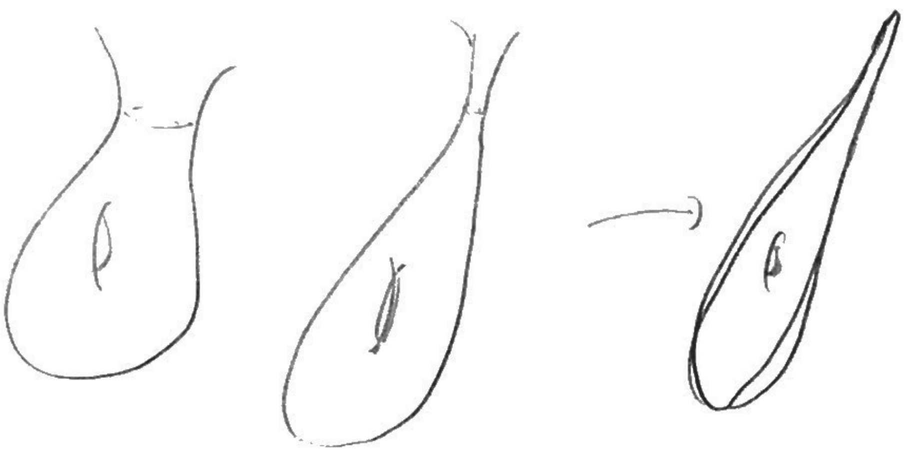
Final: cuentas en geometría hiperbólica dan

$$D(x,y,z) = 2 \log\left(\frac{e^{x/2} + e^{\frac{y+z}{2}}}{e^{-x/2} + e^{\frac{y+z}{2}}} \right)$$

Mirzakhani - McShane:

$$L = 2 \sum_{\substack{\gamma \text{ geodésica cerrada simple} \\ \perp \text{ periférica}}} \log\left(\frac{e^{L/2} + e^{\ell(\gamma)}}{e^{-L/2} + e^{\ell(\gamma)}} \right)$$

Dividiendo por L y tomando límite cuando $L \to 0$. da



$$\lim_{L \to 0} \frac{1}{L} \log\left(\frac{e^{L/2} + e^{x}}{e^{-L/2} + e^{x}} \right) = \frac{1}{1+e^{x}}$$ que es la identidad de McShane. ■