Dia 1

superficies topológicas (diferenciables)

S superficie si $\exists\ \mathcal{U}$, abrimiento de S por abiertos, y para cada $U \in \mathcal{U}$ un homeomorfismo sobre su imagen $\varphi_U : U \to \mathbb{R}^2$ tal que

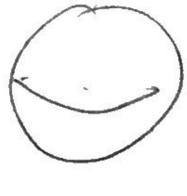
$$\varphi_U \circ \varphi_V^{-1} : \varphi_V(U \cap V) \longrightarrow \varphi_U(U \cap V)$$

es un difeomorfismo.

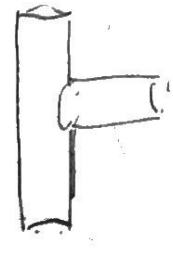
El género de una superficie conexa S es el máximo número de curvas cerradas simples $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \subset S$ tales que

$S - \{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$ es conexo

$g=1$



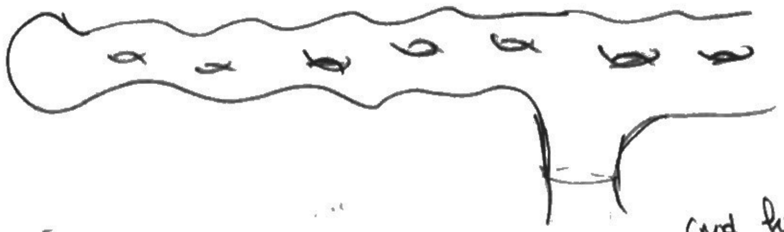
$g=0$



$g=0$

$g=1$

$g=2$



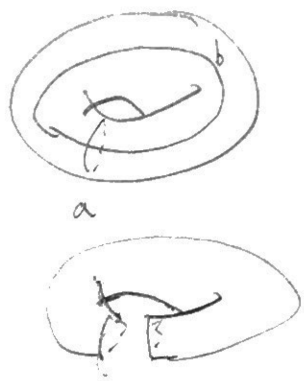
$g = \infty$.

clasificación

<u>Teorema</u> para cada $g \in \mathbb{N}_+$ existe una única superficie (mod homeo) cerrada orientable conexa de género g.

El tipo de una curva simple cerrada $\gamma \subset S$ es la clase topológica de $S-\gamma$ (i.e. $S-\gamma$ modulo homeomorfismos).

Ej:



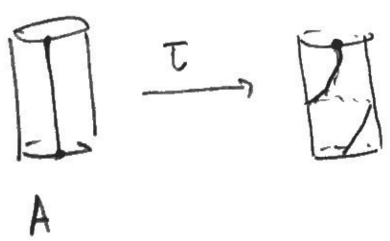
a y b tienen el mismo tipo

$\mathbb{T}^2 - a$ homeomorfo a un ~~anillo~~ cilindro. $(S^1 \times [0,1])$

$\mathbb{T}^2 - b$ ————— (a mano)

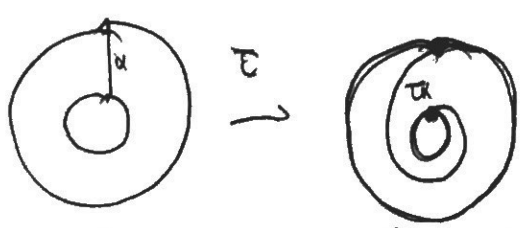
<u>otra forma</u>: Twist de Dehn. consideramos un ~~anillo~~ cilindro A

$S^1 \times [0,1]$.



fórmula: $\tau(x,t) = \left(\underbrace{R_{2\pi t}(x)}, t\right)$

rotación de ángulo $2\pi t$



α no es homotópica a $\tau\alpha$ (rel a extremidades).

S superficie, $\gamma \subset S$ curva cerrada simple entonces obtenemos un homeomorfismo de S usando γ :

Twist de Dehn alrededor de γ + id en $S - A_\gamma$

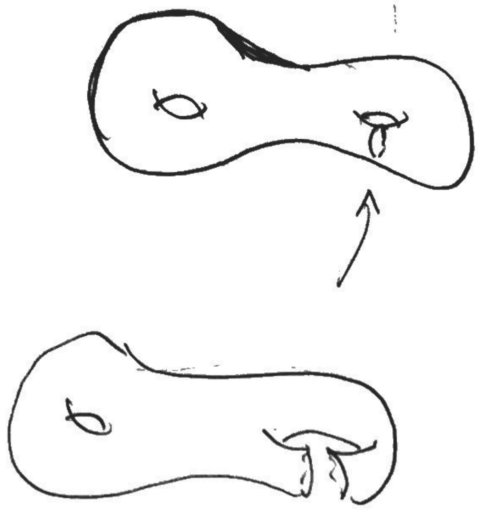
$\tau^\gamma : S \to S$ homeomorfismo <u>no</u> ~~isotópico~~ homotópico a la identidad si γ <u>no</u> es homotópicamente trivial

$h : S_\gamma \to S \quad h(b) = a \Rightarrow$ tienen el mismo tipo

homeo global

hay 2 tipos de curva en $S_{2,0}$

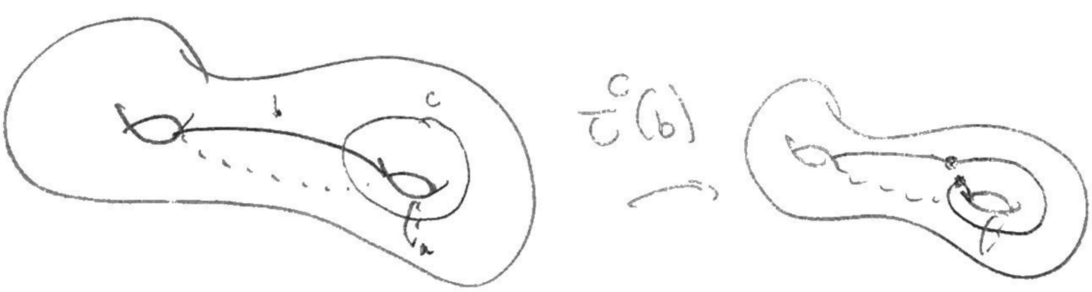
separante (i.e. $S-\gamma$ no conexo)



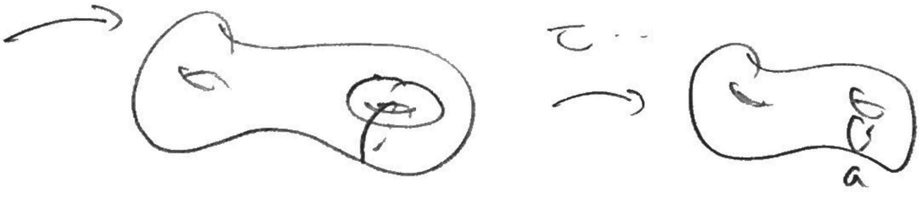
no separante.

$S_{1;2}$

2 componentes conexa de tipo $S_{1,1}$



$\tau_b^{-1}(\quad) = c$



Consideramos el grupo $\text{homeo}^{+}(S \mid \text{rel } \partial S \text{ puntos marcados}) /$ clase de homotopía

DReh:

'20s

$$\text{Mod}(S) = \text{MCG}(S)$$

- $\text{Mod}(S)$ está generado por twists de DReh
- 2 curvas cerradas simples tienen el mismo tipo $\Leftrightarrow$ $\exists\, h \in \text{Mod}(S)$ que lleva una en la otra.

$\text{Mod}(S) \curvearrowright \{$curvas cerradas simples$\}$ / homotopía libre

órbitas de $\text{Mod}(S)$ $\longleftrightarrow$ tipo

Mirzakhani '07 — Estimativa precisa del nro de curvas simples de un tipo dado.

"en S_2 hay 6 veces más curvas no separantes que separantes"

Superficies de Riemann.

S superficie de Riemann si $\exists\ \mathcal{U}$ abrimiento de S

y $\varphi_U : U \to \mathbb{C}$ homeomorfismo sobre su imagen tales que

$$\varphi_U \circ \varphi_V^{-1} : \varphi_V(U \cap V) \to \varphi_U(U \cap V)$$

es holomorfo (i.e. localmente de la forma $z \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$)

- S orientable
- si S compacta $\Rightarrow$ $f : S \to \mathbb{C}$ holomorfa implica $f = cte.$

(las funciones holomorfas son abiertas)

No hay teo de Whitney para S y $\mathbb{C}^N$

$p \in S \quad T_p^{\mathbb{C}} S = ?$

U, V entorno de p $\quad f : U \to \mathbb{C}$, $g : V \to \mathbb{C}$ holomorfas son equivalentes si $f = g$ en ~~[illegible]~~ $p \in W \subset U \cap V$.

$\{ f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa, U entorno de $p \} / \sim$ = germen de p.

$T_p^{\mathbb{C}} S$ = derivaciones en el germen de p.

- $T^{\mathbb{C}} S$ = fibrado tangente de S ← secciones se llaman campos
- $K_S = K = (T^{\mathbb{C}} S)^*$ = fibrado co-tangente de S.

(en cada punto consideramos el dual $(T_p^{\mathbb{C}} S)^* = \{\alpha : T_p^{\mathbb{C}} S \to \mathbb{C}$ lineal en $\mathbb{C}\}$

↑

secciones se llaman formas

$p \mapsto \alpha_p$ es holomorfa

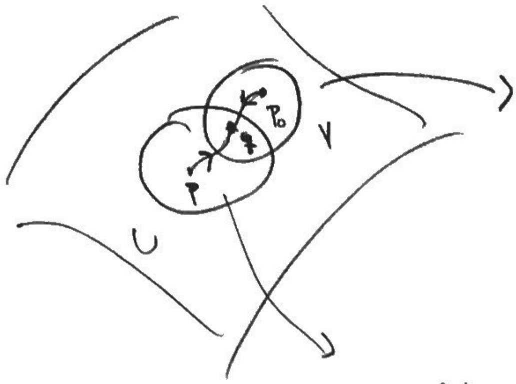
Una 1-forma holomorfa α induce una familia explícita de deformación de la estructura compleja de S:

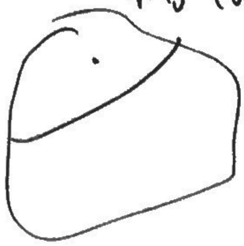
- Una 1-forma holomorfa es cerrada (i.e. la integral $\int_\gamma \alpha$ sobre una curva $\gamma : [0,1] \to S$ sólo depende de la clase de homotopía de γ rel extremidades).

$\Rightarrow$ induce cartas locales: $p \in S$ $\alpha_p \neq 0$ $p \in U$ entorno simplemente conexo.

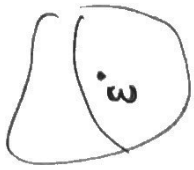
$$q \mapsto \int_p^q \alpha \in \mathbb{C}$$

Cambio de cartas:





$$\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}(w) = \int_{p_0}^{q}\alpha = \underbrace{\int_{p_0}^{p}\alpha}_{\text{constante fija}} + \overbrace{\int_{p}^{q}\alpha}^{w}$$



$$\omega = \alpha_U(q) = \int_p^q \alpha$$

Los cambios de carta ~~son~~ $w \longmapsto w + K$

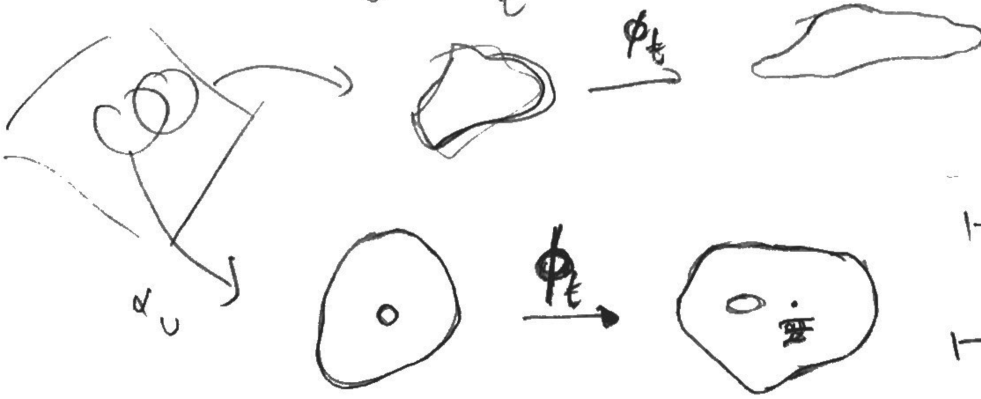
traslaciones

Vamos a deformar las cartas de forma que los cambios de carta sigan siendo holomorfos.

Sea $\phi_t(x,y) = (tx, y) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ no es holomorfo

()

consideramos $\varphi_U = \phi_t \circ \alpha_U : U \to \mathbb{C}$



Cambios de cartas holomorfos:

$\Phi = \mathrm{Re}\,v + i\,\mathrm{Im}\,v$

$\longmapsto \frac{1}{t}\mathrm{Re}\,v + i\,\mathrm{Im}\,v$

$\longmapsto \frac{1}{t}\mathrm{Re}\,v + i\,\mathrm{Im}\,v + K$

$\longmapsto z + \phi_t K$

La nueva superficie no es holomorfa a la original

$\Omega^1(S, \mathbb{C})$ induce ciertas deformaciones (no todas)

$\#$

o ?

X es un campo holomorfo en S y $\alpha \in \Omega^1(S, \mathbb{C})$

$\Rightarrow \alpha(X) : S \to \mathbb{C}$ holomorfa $\Rightarrow \alpha(X) \equiv 0$.

Consecuencia del Teorema de Hodge: $\dim_{\mathbb{C}} \Omega^1(S, \mathbb{C}) = g$ = género de S.

acá S compacta sin borde.

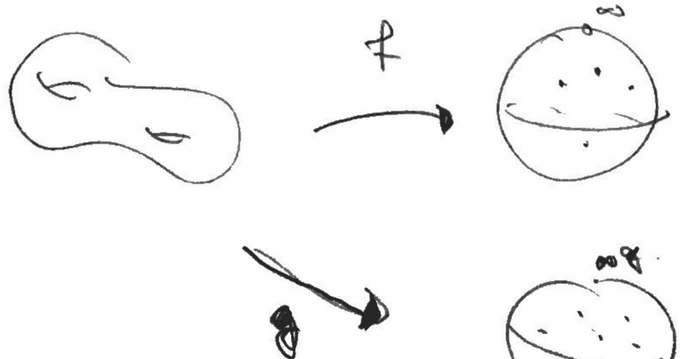
- Estructura algebraica en S superficie de Riemann compacta sin borde:

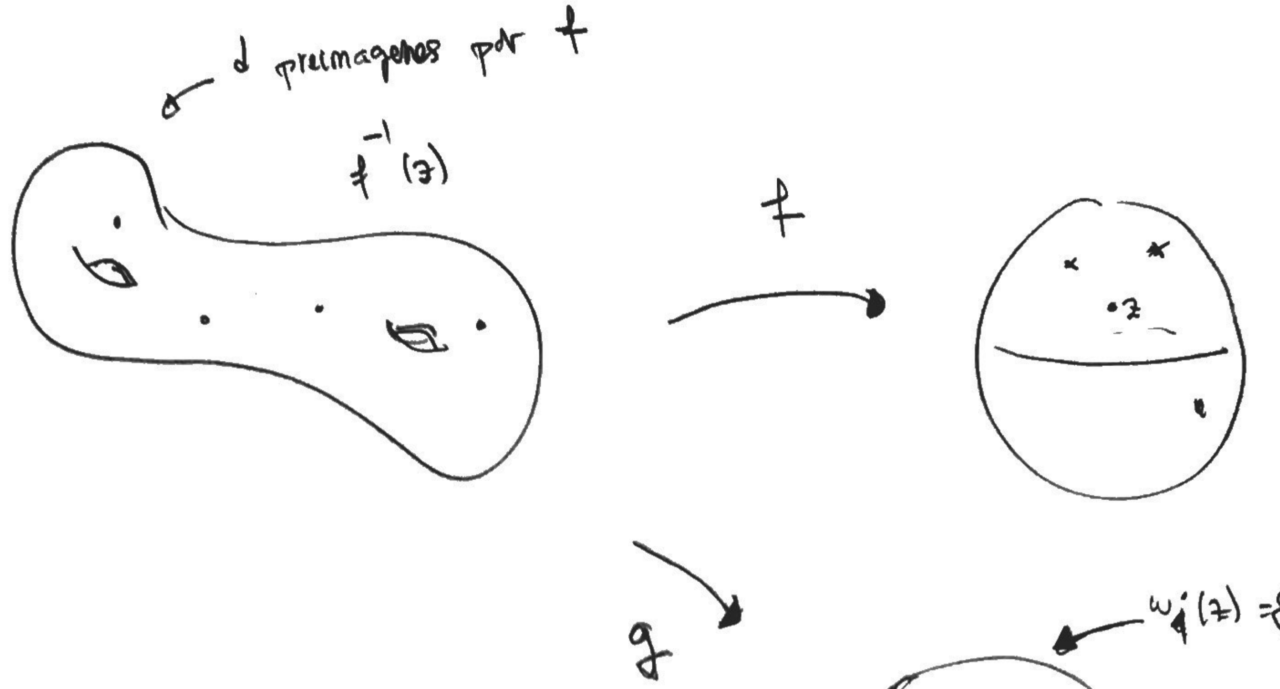
$\alpha, \beta \in \Omega^1(S, \mathbb{C})$ ceros disjuntos $\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} : S \to \overline{\mathbb{C}}$ holomorfa

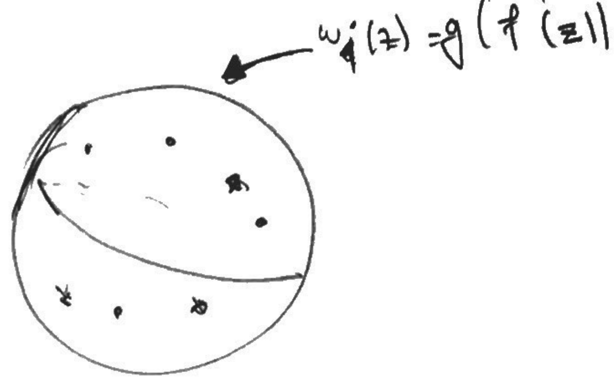
($\Rightarrow$ cubrimiento ramificado).

consideramos entonces $f, g : S \to \overline{\mathbb{C}}$ holomorfas tales $(f, g) : S - \{\ \} \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ que injectiva.

nro finito de ptos.







$z \mapsto w_1 + \cdots + w_d$ meromorfa de $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$

$= P_1(w_1, \ldots, w_d)$

$$z \mapsto \sum w_{i_1} \cdots w_{i_k}(z) = P_k(w_1 \ldots w_d)$$

$i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, d\}$

distintos.

$$\prod (z - z_i) = z^d - P_1(z_i) z^{d-1} \cdots (-1)^d \cdot P_d$$

$$z \mapsto w_1(z) \cdots w_d(z) = P_d(w_1 \ldots w_d)$$

Cada función $z \mapsto P_k(w_1(z), \ldots, w_d(z))$ es meromorfa de $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$

$\Rightarrow$ es una función racional (i.e. cociente de polinomios)

Si consideramos $P(z,w) = z^d - P_1(w_1(z), \dots w_k(z))\, z^{d-1} + \dots + (-1)^d P_d(w_1(z), \dots w_k(z))$

obtenemos de [illegible] [illegible] $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

y cuyos ceros es $\{(f(p); g(p)) : p \in S\}$.

Es decir $S - \{\ \}$ es biholomorfo a ceros de un polinomio.

cjto finito (de dos variables)

$$\mathcal{M}_{g,n} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Superficies de Riemann de género } g \text{ con} \\ n \text{ puntos marcados} \end{array} \right\}$$

módulo biholomorfismos que fijan cada uno de los puntos marcados.

espacio de Moduli,

Mirzakhani 07': Fórmula de recursión de volumen para espacios de Moduli con el volumen de Weil-Petersson